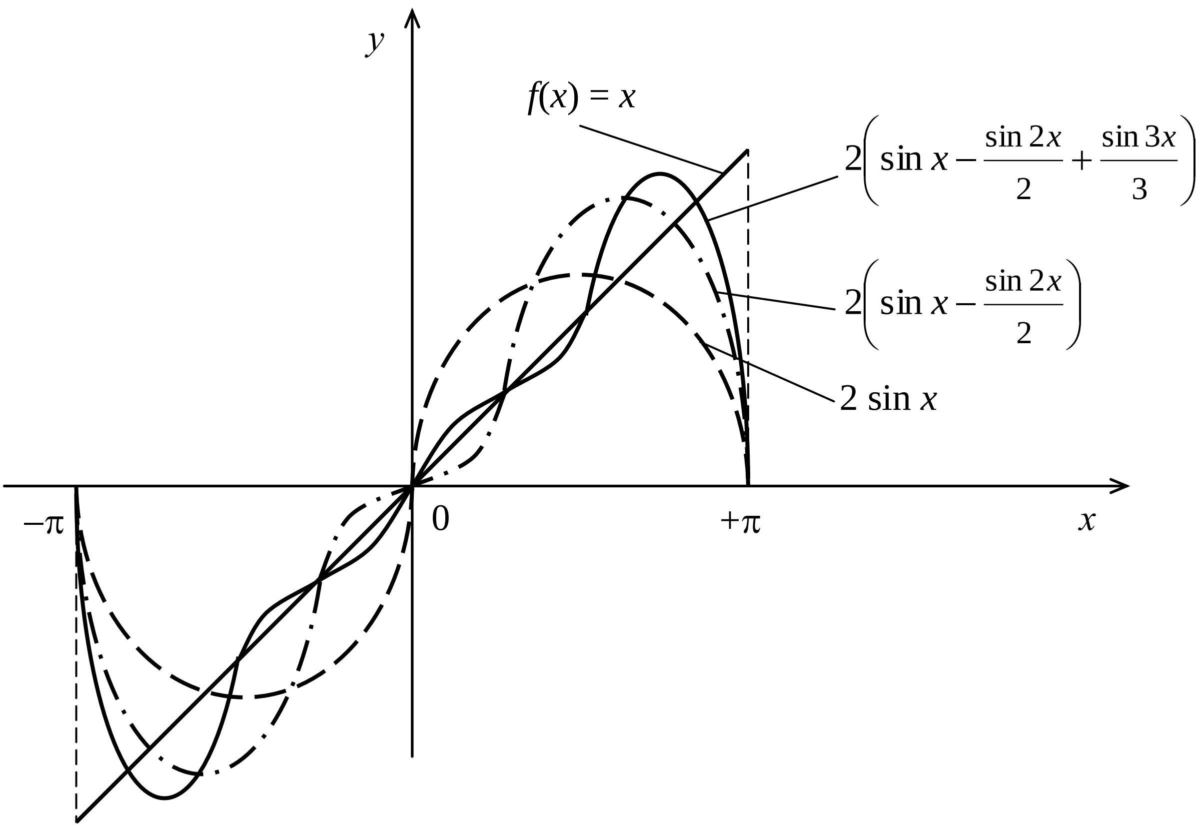
И.П. ЕГОРОВА

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. РЯДЫ



Самара, 2017

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
"Самарский государственный технический университет"

Кафедра "Общетеоретические дисциплины"

И.П. ЕГОРОВА

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА.
РЯДЫ

Учебно-методическое пособие

Самара
Самарский государственный технический университет
2017

Печатается по решению редакционно-издательского совета СамГТУ

УДК 378.147:51
Е 30

Егорова И.П.
Е 30 **Высшая математика. Ряды**: учебно-метод. пособие / *И.П. Егорова*. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2017. –100 с.: ил.

Материал учебно-методического пособия изложен в соответствии с рабочей программой по дисциплине "Высшая математика" и содержит необходимые теоретические и практические сведения по разделу "Ряды".

Изложены методы решения задач индивидуальных домашних заданий по темам "Ряды" и "Ряды Фурье".

Предназначено для инженерных, экономических и других нематематических вузовских специальностей.

УДК 378.147:51
Е 30

Рецензенты: Зам. директора по учебной работе ГБПОУ «Сызранский политехнический колледж» канд. физ.-мат. наук, доцент *В.Б. Кислинский*,

Зав. кафедрой «Общетеоретические дисциплины» канд. физ.-мат. наук, доцент *В.Н. Анисимов*

1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

"Из этой лекции станет ясно,
что не всякая сумма равна
бесконечности"

1.1 Числовые ряды с положительными членами. Основные определения

Под рядом понимается сумма бесконечного числа слагаемых. Так как складывать можно числа, функции, матрицы и так далее, то существуют числовые ряды, функциональные, матричные и др. Теория рядов широко используется в теоретических исследованиях и приближенных вычислениях. С их помощью вычисляют приближенные значения функций (логарифмических, тригонометрических и др.), определенных интегралов, находят частные решения дифференциальных уравнений и т.д.

Пусть дана числовая последовательность $\{u_n\}$, где n: $\overline{1;+\infty}$; $n \in N$, $u_n \in R$.

Определение. **Числовым рядом называется сумма членов числовой последовательности**

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n . \qquad (1.1)$$

Определение. **Слагаемые суммы (1.1) называются членами числового ряда.**

u_1 – первый член ряда;

u_2 – второй член ряда;

… – …………………;

u_n – n-ный член ряда;

… – ………………...

Рассмотрим числа вида:

$S_1 = u_1$;

$S_2 = u_1 + u_2$;

$S_3 = u_1 + u_2 + u_3$;

…………………...;

$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$;

……………………

Определение. **Числа $S_1, S_2, \ldots S_n, \ldots$ называются частичными суммами ряда (1.1).**

Числа $S_1, S_2, \ldots S_n, \ldots = \{S_n\}$ образуют последовательность частичных сумм. Принято о поведении ряда (1.1) судить по поведению последовательности $\{S_n\}$.

Определение. **Числовой ряд, все члены которого неотрицательны, называется знакоположительным.**

Определение. **Если существует и конечен предел n-ной частичной суммы ряда, то числовой ряд (1.1) называется сходящимся. В противном случае говорят, что числовой ряд (1.1) расходится.**

$$\exists \text{ и конечен } \lim_{n\to+\infty} S_n = S.$$

Определение. **Число $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ называют суммой числового ряда.**

Пример 1. Рассмотрим сумму членов геометрической прогрессии

$$\underbrace{b_1}_{u_1} + \underbrace{b_1 \cdot q}_{u_2} + \underbrace{b_1 \cdot q^2}_{u_3} + \ldots + \underbrace{b_1 \cdot q^{n-1}}_{u_n} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} b_1 \cdot q^{n-1}. \qquad (1.2)$$

Из школьного курса известно, что знаменатель геометрической прогрессии q может принимать значения $|q| < 1$, $|q| > 1$ или $|q| = 1$, в зависимости от которых числовой ряд (1.2) может вести себя по-разному:

а) рассмотрим случай $|q| < 1$.

$S_n = b_1 + b_1 \cdot q + \ldots + b_1 \cdot q^{n-1} = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, как сумма членов геометрической прогрессии.

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{b_1}{1-q}$ – существует и конечен, $\Rightarrow$ ряд (1.2) сходится;

б) если $|q| > 1$. $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b_1(1-\infty)}{1-q} = \infty$, $\Rightarrow$ ряд расходится;

в) $q = 1$. Ряд (1.2) принимает вид $b_1 + b_1 + \ldots + b_1 + \ldots$, $S_n = n\, b_1$.

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \infty, \Rightarrow \text{ряд (1.2) расходится;}$$

г) если $q = -1$. $b_1 - b_1 + b_1 - b_1 + b_1 - \ldots$ – знакочередующийся ряд и пусть $b_1 \neq 0$. Забегая вперед, можно сказать, что по теореме Лейбница ряд (1.2) расходится.

Вывод. Числовой ряд, члены которого являются членами геометрической прогрессии, сходится только при $|q| < 1$.

Пример 2. $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$. Исследовать ряд на сходимость и вычислить его сумму, если это возможно.

Воспользуемся определением: $S_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} =$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = 1$, $\Rightarrow$ исследуемый ряд сходится и его сумма $S = 1$.

Пример 3. Исследовать ряд на сходимость по определению и найти его сумму, если он сходится:

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} + \operatorname{arctg}\frac{1}{18} + \operatorname{arctg}\frac{1}{32} + \ldots + \operatorname{acrtg}\frac{1}{2(n-1)^2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2} + \ldots$$

Проведем рассуждения в общем виде: $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = z$ – угол, по определению

$$\operatorname{tg} z = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y) = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y)}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)\cdot\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y)} = \frac{x+y}{1 - x\cdot y}.$$

$$z = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-x\cdot y}$$

Найдем $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

$$u_1 + u_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} = \operatorname{arctg}\frac{1/2 + 1/8}{1 - 1/2 \cdot 1/8} = \operatorname{arctg}\frac{2}{3}$$

$$u_1 + u_2 + u_3 = \operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{18} = \operatorname{arctg}\frac{2/3 + 1/18}{1 - 2/3 \cdot 1/18} = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$$

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = \operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \operatorname{arctg}\frac{1}{32} = \operatorname{arctg}\frac{3/4 + 1/32}{1 - 3/4 \cdot 1/32} = \operatorname{arctg}\frac{4}{5}$$

Сравнивая $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$, $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$, $\operatorname{arctg}\frac{4}{5}$, можно предположить, что $u_1 + \ldots + u_5 = \operatorname{arctg}\frac{5}{6}$ (убедитесь в этом самостоятельно).

Значит, $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}$.

Вычислим $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1} = \operatorname{arctg} \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

Следовательно, исходный ряд сходится, а его сумма $S = \frac{\pi}{4}$.

Необходимое условие сходимости числового ряда

Теорема. **Если числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ сходится, то его n-ный член стремится к нулю с ростом номера n, т.е. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.**

Рассмотрим $u_n = S_n - S_{n-1}$, тогда

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Следствие. Если $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, то числовой ряд (1.1) расходится (доказать методом от противного).

Замечание. Доказанная теорема является необходимым, но не достаточным условием сходимости числового ряда, т.е. обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Рассмотрим пример.

Числовой ряд вида

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots \qquad (1.3)$$

называется гармоническим. $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, а ряд расходится. Покажем это. Предположим противное тому, что требуется доказать, т.е. предположим, что ряд сходится. Вычислим

$$S_{2n}-S_n=\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n-1}+\ldots+\frac{1}{n+1}}_{n-\text{слагаемых}}\geq\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}=n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

$$S_{2n}-S_n\geq\frac{1}{2}.$$

Но так как по предположению ряд сходится,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(S_{2n}-S_n\right)=S-S=0.$$

Переходя в неравенстве к пределу, получаем $0\geq\frac{1}{2}$, что невозможно. Значит, наше предположение неверно, гармонический ряд (1.3) расходится.

Пример 4. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{1000n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{1000n}=0{,}001\neq 0$, $\Rightarrow$ ряд расходится по следствию из необходимого признака.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$.

Применим необходимый признак сходимости:

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\left[1^\infty\right]=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\neq 0$, $\Rightarrow$ ряд расходится.

Пример 6. Исследовать ряд на сходимость

$$\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\ldots+\ln\frac{n+1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\frac{n+1}{n}.$$

Необходимый признак применить нельзя, так как

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \ln\frac{n+1}{n}\left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \ln 1 = 0$$

$\Rightarrow$ ряд может как сходиться, так и расходиться.

Исследуем ряд по определению:

$$S_n = \ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ldots + \ln\frac{n+1}{n} = \ln\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n} = \ln(n+1).$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$ – бесконечен, $\Rightarrow$ ряд расходится.

Вывод. Только невыполнение необходимого условия сходимости позволяет делать определенный вывод, а его выполнение $\left[\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0\right]$ не решает вопроса о поведении числового ряда.

Остаток ряда и его свойства

Рассмотрим числовой ряд (1.1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$. Отбросим первые n членов ряда, получим ряд

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\,. \qquad (1.4)$$

Определение. **Ряд (1.4) называется *n*-ным остатком ряда (1.1) или остатком после *n*-ного члена.** Обозначается $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k = r_n$.

Свойство 1. **Если сходится ряд, то сходится любой его остаток.**

Доказательство. Так как ряд (1.1) сходится, то его сумма выражается конечным числом S, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = S$, но $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k + \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k =$ $= S_n + r_n$, $r_n = S - S_n$. Вычислим $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$, $\Rightarrow$ ряд (1.4) как остаток ряда (1.1) сходится.

Свойство 2. **Если сходится какой-либо остаток ряда, то сходится и сам ряд.**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + r_n$$

По условию r_n – остаток – сходится, а сам ряд отличается от него на конечное число членов, $\Rightarrow$ (1.1) будет сходиться, и его сумма будет равна сумме первых n-членов ряда и остатка. $S = S_n + r_n$.

Свойство 3. **Если числовой ряд сходится, то сумма его остатка стремится к нулю, когда номер стремится к бесконечности** (доказательство см. *Свойство 1*).

Вывод. Ряд и остаток ведут себя одинаково – сходятся или расходятся одновременно.

1.2 Операции над числовыми рядами

Умножение на число. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ (1.1) и ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c \cdot u_n \qquad (1.5)$$

где c – $const.$, $c \neq 0$.

Теорема 1. **Если ряд (1.1) сходится, то сходится и ряд (1.5)** (доказать самостоятельно, по определению, используя основные теоремы о пределах.)

Пример 7. Исследовать ряд на сходимость:

$$2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-4}} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-4}}.$$

Рассмотрим ряд: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ – сходится как сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Исходный ряд получается путем умножения на число $c = 2^4$. Тогда, по теореме 1, исходный ряд сходится.

Сложение и вычитание рядов: Пусть даны 2 ряда: $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ (1.1)

$$и \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \upsilon_n \tag{1.6}$$

Определение: **Суммой (разностью) рядов (1.1) и (1.6) называется ряд вида $\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n \pm \upsilon_n)$.**

Теорема 2. **Если ряды (1.1) и (1.6) сходятся и их суммы соответственно равны S' и S'', то каждый из двух рядов $\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n \pm \upsilon_n)$ сходится и сумма каждого равна соответственно $S' \pm S''$** (доказательство по определению).

Пример 8. Исследовать ряд $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}$ на сходимость, и если он сходится, найти его сумму.

$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{6}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{6}\right)^n \Rightarrow$ сходится как сумма двух сходящихся рядов.

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3{,}5.$$

Следствие 1. **Сумма (разность) сходящегося и расходящегося рядов есть ряд расходящийся** (доказательство от противного.)

Следствие 2. **Если ряды (1.1) и (1.6) расходятся, то о сходимости их суммы (разности) ничего заранее сказать нельзя.**

Покажем это на конкретных примерах.

Пример 9. Ряды $3 + 6 + 9 +\ldots+ 3n +\ldots$ и $2 + 4 + 6 +\ldots+ 2n +\ldots$ расходятся (как сумма членов арифметической прогрессии). Их сумма $5 + 10 + 15 +\ldots+ 5n +\ldots$ и разность $1 + 2 + 3 +\ldots+ n +\ldots$ расходятся по аналогии.

Пример 10. Даны ряды: $1 + 1 + 1 +\ldots+ 1 +\ldots$ и $2 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \ldots + \frac{2^n+1}{2^n}$ – расходятся.

Первый ряд расходится по определению, а второй – как сумма сходящегося и расходящегося рядов. Расходимость второго ряда можно показать и иначе:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2^n+1}{2^n}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)=(1+1)+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\right)+\ldots;$$

$$S_n=(1+1)+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\right)>\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n\ \text{раз}}=n,$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n>\lim_{n\to+\infty} n=+\infty,\ \Rightarrow$$ второй ряд расходится по определению.

Исследуем на сходимость сумму и разность данных рядов.

Сумма: $(1+2)+\left(1+\frac{3}{2}\right)+\left(1+\frac{5}{4}\right)+\ldots+\left(1+1+\frac{1}{2^{n-1}}\right)+\ldots;$

$$S_n=(1+2)+\left(1+\frac{3}{2}\right)+\left(1+\frac{5}{4}\right)+\ldots+\left(1+1+\frac{1}{2^{n-1}}\right)>\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n\ \text{раз}}=n,$$

$\Rightarrow$ сумма данных рядов расходится.

Разность: для получения положительного числового ряда из второго ряда вычтем первый: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}$ – сходится как сумма членов геометрической прогрессии со знаменателем $q=\frac{1}{2}<1.$

Пример 11. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{14}{49n^2-70n-24}$.

Разложим знаменатель на множители: $49n^2-70n-24=0$.

$$\frac{Д}{4}=35^2+49\cdot 24=49^2$$

$$n_{1,2}=\frac{35\pm 49}{49},\quad n_1=\frac{84}{49}=\frac{12}{7}\quad \text{или}\quad n_2=-\frac{14}{49}=-\frac{2}{7}.$$

$$49n^2-70n-24=49\left(n-\frac{12}{7}\right)\left(n+\frac{2}{7}\right)=(7n-12)(7n+2)$$

Ряд примет вид

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{14}{49n^2-70n-24}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{14}{(7n-12)(7n+2)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{7n-12}-\frac{1}{7n+2}\right).$$

Вычислим $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

$$u_1=\frac{1}{-5}-\frac{1}{9};\quad u_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{16};\quad u_3=\frac{1}{9}-\frac{1}{23};\quad u_4=\frac{1}{16}-\frac{1}{30};\quad u_5=\frac{1}{23}-\frac{1}{37}\ \text{ и т.д.}$$

$$u_{n-1}=\frac{1}{7n-19}-\frac{1}{7n-5};\quad u_n=\frac{1}{7n-12}-\frac{1}{7n+2}.$$

Тогда $S_n = \left(-\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{23}\right)+\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{30}\right)+\ldots+$

$$+\left(\frac{7}{7n-19}-\frac{1}{7n-5}\right)+\left(\frac{1}{7n-12}-\frac{1}{7n+2}\right)=-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{7n-5}-\frac{1}{7n+2},$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}=0{,}3,$ следовательно, исходный числовой ряд сходится, а его сумма равна 0,3.

Задания для самостоятельного решения

1. Сформулируйте аналог теоремы: "Если все члены сходящегося ряда умножить на действительное число, то полученный ряд также сходится" для расходящихся рядов.
2. Существует ли аналог теоремы 2 для расходящихся рядов?
3. Сформулируйте достаточный признак расходимости ряда.
4. Найдите сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{3n+8}{n(n+1)(n+2)}$.

1.3 Признаки сходимости числовых рядов с положительными членами: теоремы сравнения, признак Даламбера, локальная и интегральная теоремы Коши

Рассмотрим числовой ряд (1.1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$, где $u_n \ge 0$, тогда последовательность его частичных сумм является неубывающей. Необходимым и достаточным условием сходимости такой последовательности является ее ограниченность сверху. Возможны два случая:

1) $\{S_n\}$ – ограничена, $\Rightarrow$ ряд сходится $\left(\exists \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S\right)$,

2) $\{S_n\}$ – не ограничена, $\Rightarrow$ ряд расходится $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \infty\right)$.

Поэтому справедлива следующая *теорема*: **Для того, чтобы ряд с неотрицательными членами сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограничена (сверху)** (без доказательства).

В предыдущих примерах мы вычисляли сумму числовых рядов, однако прежде чем выполнять указанную операцию, полезно убедиться в том, что он сходится. Иначе большие усилия будут затрачены на то, чего не существует.

Признак сравнения в неравенстве

Теорема. **Пусть заданы два числовых ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ (1.1) и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \upsilon_n$ (1.6), где $u_n \ge \upsilon_n > 0$. Тогда из сходимости ряда (1.1) следует сходимость ряда (1.6), а из расходимости ряда (1.6) следует расходимость ряда (1.1).**

Доказательство. $u_n \ge \upsilon_n \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} u_k \ge \sum\limits_{k=1}^{n} \upsilon_k \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} u_k \ge \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \upsilon_k$.

1. Если ряд (1.1) сходится, то $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = S \ge \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \upsilon_k$, что означает сходимость ряда (1.6).

2. Если ряд (1.6) расходится, то $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} u_k \ge \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \upsilon_k = \infty$, что означает расходимость ряда (1.1).

Пример 12. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^n}+\ldots$$

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^n}+\ldots<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{2^n}.$$

Но ряд $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{2^n}$ сходится (см. выше). Тогда по теореме сравнения в неравенстве из сходимости ряда с большими членами следует сходимость ряда с меньшими членами $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}$, добавляя к которому еще один член, равный единице, его поведение не изменится. Итак, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}$ – сходящийся ряд.

Пример 13. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\lg n}=\frac{1}{\lg 2}+\frac{1}{\lg 3}+\ldots+\frac{1}{\lg n}+\ldots$$

Так как $n>\lg n,$ для всех $n\geq 2,$ то $\frac{1}{n}<\frac{1}{\lg n}$ и ряд с меньшими членами $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n}$ расходится, тогда по теореме сравнения исходный ряд $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\lg n}$ расходится.

Признак сравнения в предельной форме

Теорема. **Пусть даны два числовых ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ (1.1) и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\upsilon_n$ (1.6), где u_n, $\upsilon_n>0$ и существует конечный**

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{\upsilon_n}=\lambda>0$. **Тогда ряды (1.1) и (1.6) сходятся или расходятся одновременно.**

Доказательство. Согласно определению предела последовательности $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{\upsilon_n}=\lambda \Leftrightarrow \lambda-\varepsilon<\dfrac{u_n}{\upsilon_n}<\lambda+\varepsilon$ при $n>N \Rightarrow$ $\underbrace{(\lambda-\varepsilon)\upsilon_n<u_n}_{1}<\underbrace{(\lambda+\varepsilon)\upsilon_n}_{2}$.

1. Пусть ряд (1.6) сходится, тогда ряд $(\lambda+\varepsilon)\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\upsilon_n$, отличающийся от (1.6) на множитель, также сходится. Теперь из признака сравнения в неравенствах, согласно неравенству 2, ряд (1.1) сходится.

2. Пусть ряд (1.1) сходится, тогда из признака сравнения, согласно неравенству 1, ряд (1.6) сходится.

3. Пусть ряд (1.1) расходится, тогда из признака сравнения, согласно неравенству 2, ряд (1.6) расходится.

4. Пусть ряд (1.6) расходится, тогда из признака сравнения, согласно неравенству 1, ряд (1.1) расходится.

Пример 14. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{2n+1}$ на сходимость.

С каким рядом удобно сравнить данный ряд? Сравним с $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$ расходящимся гармоническим рядом. Применяя теорему сравнения в предельной форме, получим: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2n+1}\cdot n=\dfrac{1}{2}$ – конечен, $\Rightarrow$ исходный ряд расходится.

Пример 15. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sin\dfrac{\pi}{n}$.

Сравним с гармоническим расходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$, вычисляя

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\pi\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}=\left\{\begin{array}{l}\frac{\pi}{n}=k,\\ n\to+\infty,\\ k\to 0.\end{array}\right\}=\pi\cdot\lim_{k\to 0}\frac{\sin k}{k}=\quad\pi,\quad\Rightarrow$$ ряды

ведут себя одинаково. Исходный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{\pi}{n}$ расходится.

Замечание. Отметим, что признаки сравнения не всегда удобно применять, поскольку для их использования в каждом конкретном случае необходимо найти соответствующий ряд, сходимость или расходимость которого была бы известна. Поэтому на практике часто используют другие признаки сходимости, основанные на свойствах членов исследуемого ряда.

Задания для самостоятельного решения

Вопрос о сходимости данных рядов решить с помощью признаков сравнения.

1. $\frac{1}{1\cdot 1}+\frac{1}{3\cdot 2^1}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)2^{n-1}}+\ldots$

2. $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{4}+\ldots+\sin\frac{\pi}{2^n}+\ldots$

3. $1+\frac{1+2}{1+2^2}+\ldots+\frac{1+n}{1+n^2}+\ldots$

4. $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+4)}+\ldots$

5. $\frac{2}{3}+\frac{3}{8}+\ldots+\frac{n+1}{(n+2)n}+\ldots$

6. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}+\ldots+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}+\ldots$

7. $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n^2+1}+\ldots$

8. $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{3n-1}+\ldots$

9. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-4n+5}$

10. $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$

11. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$

12. $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$

13. $\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{\frac{1}{n^4+1}}$

14. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$

15. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)$

Признак Даламбера

Теорема. **Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ (1.1), где $u_n > 0$, существует $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda$, тогда, если $\lambda > 1$ – ряд расходится, $\lambda < 1$ – сходится. Если $\lambda = 1$, то вопрос о сходимости числового ряда остается открытым.**

Доказательство. Согласно определению предела последовательности $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda \Leftrightarrow \lambda - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \lambda + \varepsilon$ при $n > N$, $n \in N$. Полагая $\lambda + \varepsilon = q$, получим $\frac{u_{n+1}}{u_n} < q$. Пусть $\lambda < 1$, а ε – произвольно мало, тогда ε можно подобрать настольно малым, что $q = \lambda + \varepsilon < 1$. Тогда для всех $n > N$ имеем: $\frac{u_{N+1}}{u_N} < q$, $\frac{u_{N+2}}{u_N} < q$, $\frac{u_{N+3}}{u_N} < q$, …, т.е. $u_{N+1} < u_N \cdot q$, $\quad u_{N+2} < u_{N+1}\cdot q < u_N \cdot q^2$, $\quad u_{N+3} < u_{N+2}\cdot q < u_N\cdot q^3$, ...

Рассмотрим два ряда:

$$u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + u_{N+3} + \ldots \tag{1.7}$$

и

$$u_N + u_N\cdot q + u_N\cdot q^2 + u_N\cdot q^3 + \ldots \tag{1.8}$$

Ряд (1.8) сходится как сумма членов геометрической прогрессии со знаменателем $q < 1$. Тогда по теореме сравнения в неравенстве сходится и ряд (1.7). Но ряд (1.7) получается из ряда (1.1) как остаток после $N–1$ члена. Используем свойства ряда и остатка, следовательно (1.1) сходится, если $\lambda < 1$. Пусть теперь $\lambda > 1$. Покажем, что ряд расходится. Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda > 1 \Rightarrow u_{n+1} > u_n$, значит члены ряда

(1.1) возрастают с увеличением номера члена n. Поэтому $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, т.е. выполняется достаточный признак расходимости числового ряда, исходный ряд расходится.

Замечание 1. Если $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$, то ряд (1.1) расходится.

Замечание 2. Если расходимость ряда (1.1) установлена с помощью признака Даламбера, то общий член ряда не стремится к нулю с ростом номера n.

Замечание 3. Если $\lambda = 1$, признак Даламбера на вопрос о том, сходится или расходится ряд, ответа не дает. Как показывают примеры, в этом случае может иметь место как сходимость, так и расходимость, нужны дополнительные исследования.

Пример 16. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2n-1}{3^n}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{3^n \cdot 3} \cdot \frac{3^n}{2n-1} = \frac{1}{3} < 1, \Rightarrow \text{ исходный ряд сходится.}$$

Пример 17. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \sqrt{n} = \sqrt{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1}} = 1$ – ничего сказать нельзя, применим признак сравнения. $\sqrt{n} < n$. $\dfrac{1}{\sqrt{n}} > \dfrac{1}{n}$, но $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$ – гармонический ряд с меньшими членами расходится, $\Rightarrow$ исходный ряд расходится по признаку сравнения в неравенствах.

Замечание 4. Признак Даламбера удобно применять для рядов, n-ный член которых содержит степени или факториалы.

Пример 18. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{3^n (n+1)!}$.

Применим признак Даламбера, найдем

$$u_{n+1} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)(2n+1)}{3^{n+1}(n+2)!}.$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n+1)}{3^{n+1}(n+2)!}\cdot\frac{3^n(n+1)!}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+1)}{3(n+2)}\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=}\frac{2}{3}<1,\ \Rightarrow \text{ ряд сходится.}$$

Задания для самостоятельного решения

Доказать сходимость данных рядов с помощью признака Даламбера.

1. $\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)!}+\ldots$
2. $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\ldots$
3. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}+\ldots+n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}+\ldots$
4. $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot5}{1\cdot5}+\ldots+\frac{2\cdot5\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{1\cdot5\cdot\ldots\cdot(4n-3)}+\ldots$
5. $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\ldots+\frac{n^2}{3^n}+\ldots$
6. $\frac{1}{3}+\frac{1\cdot3}{3\cdot6}+\ldots+\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{3^n\cdot n!}+\ldots$
7. $\sin\frac{\pi}{2}+4\sin\frac{\pi}{4}+\ldots+n^2\sin\frac{\pi}{2^n}+\ldots$
8. $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}+\ldots$
9. $\frac{2}{2}+\frac{2\cdot3}{2\cdot4}+\ldots+\frac{(n+1)!}{2^n\cdot n!}+\ldots$
10. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$

Локальная теорема Коши

Теорема. **Если существует $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lambda\ge0$, где u_n – n-ный член числового ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ (1.1), тогда:**

1) если $\lambda<1$, ряд (1.1) сходится;

2) если $\lambda>1$, ряд (1.1) расходится;

3) если $\lambda=1$, вопрос о поведении числового ряда остается открытым.

Доказательство. Пусть существует конечный $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lambda$, $\Rightarrow$

по определению предела последовательности $\lambda - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < \lambda + \varepsilon$ при $n > N \Rightarrow \underbrace{(\lambda-\varepsilon)^n}_{1} < u_n < \underbrace{(\lambda+\varepsilon)^n}_{2}.$

Просуммируем неравенства 1 и 2:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\lambda-\varepsilon)^n < \sum_{n=1}^{+\infty}u_n < \sum_{n=1}^{+\infty}(\lambda+\varepsilon)^n.$$

Пусть $\lambda < 1$, выберем ε так, чтобы $\lambda + \varepsilon < 1$, тогда ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}(\lambda+\varepsilon)^n$ сходится как сумма членов геометрической прогрессии со знаменателем $q = \lambda + \varepsilon < 1$, тогда по признаку сравнения в неравенстве $\Rightarrow$ исходный ряд сходится.

Пусть $\lambda > 1$, выберем ε так, чтобы $\lambda - \varepsilon > 1$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}(\lambda-\varepsilon)^n$ расходится, $\Rightarrow$ исходный ряд также будет расходиться.

Замечание. Если $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n} = 1$, то этот случай требует дополнительного исследования.

Пример 19. Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

Применим признак Коши: $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$, $\Rightarrow$ ряд сходится.

Интегральная теорема Коши

Теорема. **Пусть $u(n)$ положительная, непрерывная, монотонно убывающая на $[1,+\infty)$ функция натурального аргумента, тогда числовой ряд $u(1) + u(2) + u(3) + \ldots + u(n) \ldots$ (1.1) сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом $\int_1^{+\infty} u(n)\cdot dn$.**

Доказательство. По условию функция $u(n)$ – убывающая. Тогда для n-ного частичного отрезка $[n; n+1]$ справедливо неравенство

$$u(n+1) \le u(\xi) \le u(n), \tag{1.9}$$

где $\xi \in [n; n+1]$.

Применим к n-ному частичному отрезку теорему о среднем:

$$\int_n^{n+1} u(n) \cdot dn = u(\xi) \cdot [n+1-n] = u(\xi).$$

Подставим полученное в (1.9):

$$u(n+1) \le \int_n^{n+1} u(n) \cdot dn \le u(n) \tag{1.10}$$

Просуммируем все части неравенства (1.10):

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u(n+1) \le \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} u(n) \cdot dn \le \sum_{n=1}^{+\infty} u(n) \tag{1.11}$$

или

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} u(n+1) \le}_{1} \int_1^{+\infty} u(n) \cdot dn \underbrace{\le \sum_{n=1}^{+\infty} u(n)}_{2}. \tag{1.12}$$

Пусть сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, тогда, с учетом неравенства 2 формулы (1.12), сходится несобственный интеграл.

Если несобственный интеграл сходится, то из неравенства 1 формулы (1.12) следует сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} u(n+1)$, а это есть остаток исходного ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ после n-ного члена. Но ряд и остаток ведут себя одинаково.

Пусть теперь $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ расходится, тогда расходится его остаток $\sum_{n=1}^{+\infty} u(n+1)$, а, значит, с учетом неравенства 1 формулы (1.12), будет расходиться несобственный интеграл.

И последнее, если расходится несобственный интеграл, тогда, с учетом неравенства 2 формулы (1.12), будет расходиться и сам ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Пример 20. Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\lambda}}$.

Данный ряд называется рядом Дирихле, при $\lambda = 1$ является гармоническим; при $\lambda \le 0$ ряд расходится; при $\lambda > 0$ выполняются все условия интегральной теоремы Коши.

Вычислим $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\lambda}} dx = \left. \frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda} \right|_1^{+\infty} =$

$$= \begin{cases} \lambda < 1, \quad 1-\lambda > 0 \Rightarrow = \infty - \frac{1}{1-\lambda} = \infty & - \text{интеграл расходится} \\ \lambda > 1, \quad 1\text{-}\lambda < 0 \Rightarrow = \frac{1}{\infty} - \frac{1}{1-\lambda} = +\frac{1}{\lambda - 1} \Rightarrow & \text{интеграл сходится} \end{cases}$$

Итак, ряд Дирихле сходится только при $\lambda > 1$.

Заметим, что ни признак Коши, ни признак Даламбера не решают вопроса о сходимости данного ряда, так как

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^{\lambda}}{(n+1)^{\lambda}} = 1^{\lambda} = 1.$$

Задания для самостоятельного решения

Доказать сходимость данных рядов с помощью локального признака Коши

1. $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln^2 3} + \ldots + \frac{1}{\ln^n (n+1)} + \ldots$

2. $\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n + \ldots$

3. $\arcsin 1 + \arcsin^2 \frac{1}{2} + \ldots + \arcsin^n \frac{1}{n} + \ldots$

4. $\frac{2}{3}+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4}{9}+\ldots+\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}+\ldots$

Вопрос о сходимости рядов решить с помощью интегрального признака Коши

1. $\frac{1}{2\ln^2 2}+\frac{1}{3\ln^2 3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}+\ldots$

2. $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\ldots+\frac{1}{n\ln n}+\ldots$

3. $\left(\frac{1+1}{1+1^2}\right)^2+\left(\frac{1+2}{1+2^2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2+\ldots$

4. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$

Выяснить, какие из данных рядов сходятся, какие расходятся:

1. $\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}+\ldots$

2. $1+\frac{2}{3}+\ldots+\frac{n}{2n-1}+\ldots$

3. $\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\ldots+\sqrt{\frac{n+1}{n}}+\ldots$

4. $1+\frac{4}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{n^2}{n!}+\ldots$

5. $2+\frac{5}{8}+\ldots+\frac{n^2+1}{n^3}+\ldots$

6. $\frac{1}{1001}+\frac{2}{2001}+\ldots+\frac{n}{1000n+1}+\ldots$

7. $\frac{1}{1+1^2}+\frac{2}{1+2^2}+\ldots+\frac{n}{1+n^2}+\ldots$

8. $\frac{1}{3}+\frac{3}{3^2}+\ldots+\frac{2n-1}{3^n}+\ldots$

9. $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg}^2 \dfrac{1}{2} + \ldots + \operatorname{arctg}^n \dfrac{1}{n} + \ldots$

10. $2 + \dfrac{4}{16} + \ldots + \dfrac{2^n}{n^4} + \ldots$

11. $\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{6\cdot 7} + \ldots + \dfrac{1}{(5n-4)(4n-1)} + \ldots$

12. $\dfrac{3}{2} + \dfrac{9}{8} + \ldots + \dfrac{3^n}{n\cdot 2^n} + \ldots$

13. $1 + \dfrac{1\cdot 2}{2^2} + \ldots + \dfrac{n!}{n^n} + \ldots$

14. $\sin\dfrac{\pi}{2} + \sin\dfrac{\pi}{4} + \ldots + \sin\dfrac{\pi}{2n} + \ldots$

Доказать каждое из соотношений с помощью ряда, общим членом которого является функция, стоящая под знаком предела

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(2n)!}{a^{n!}} = 0 \quad (a > 1)$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^n}{(2n)!} = 0$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^n}{(n!)^2} = 0$

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n!)^n}{n^{n^2}} = 0$

6. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(2n)^n}{(2n+1)!} = 0$

Исследовать числовые ряды на сходимость

1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\lg n}{\sqrt{n^5 + n}}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n} + 2} \operatorname{arctg} \dfrac{n+3}{n^2+5}$

3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{5^n (n+1)!}{(2n)!}$

4. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \left(\dfrac{n+1}{2n-3}\right)^{n^2}$

5. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{n^2}{(n^3+1)\cdot \ln n}$

2. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Из лекции мы убедимся, что известное утверждение: от перестановки слагаемых сумма не меняется – имеет свою границу.

2.1 Знакопеременные ряды. Теорема Лейбница. Абсолютная и условная сходимости

Определение. **Числовые ряды, содержащие как положительные, так и отрицательные члены, называются знакопеременными или рядами с произвольными членами.**

Рассмотрим ряд, в котором за каждым положительным членом следует отрицательный:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} u_n . \qquad (2.1)$$

Определение. **Ряд (2.1), в котором $u_n > 0$, называется знакочередующимся.**

Для исследования знакочередующихся рядов на сходимость применяется теорема Лейбница.

Теорема. **Если члены знакочередующегося ряда (2.1) убывают по абсолютной величине ($u_1 > u_2 > \ldots > u_n > \ldots$) и $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, то знакочередующийся ряд сходится, его сумма положительна и не превосходит первого члена.**

Доказательство. Рассмотрим n-ную частичную сумму ряда (2.1), когда число слагаемых в ней четно: S_n, где $n = 2m$.

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2m-1} - u_{2m}) > 0,$$

– учитывая первое условие теоремы.

Иначе: $S_{2m} = u_1 - \underbrace{(u_2 - u_3)}_{>0} - \underbrace{(u_4 - u_5)}_{>0} - \ldots - \underbrace{(u_{2m-2} - u_{2m-1})}_{>0} - u_{2m} < u_1.$

Таким образом, $\{S_{2m}\}$ – возрастает и ограничена, а значит, имеет конечный предел: $\lim\limits_{m\to+\infty} S_{2m} = S$, где $0 < S < u_1$. Если число слагаемых нечетно: $n = 2m + 1$, $S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$. Переходя в последнем равенстве к пределу при $m \to +\infty$, получим $\lim\limits_{m\to+\infty} S_{2m+1} = \lim\limits_{m\to+\infty} S_{2m} + \lim\limits_{m\to+\infty} u_{2m+1} = S$, учитывая второе условие теоремы. Таким образом доказано, что и при четных n, и при нечетных $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$, $\Rightarrow$ знакочередующийся ряд (2.1) сходится.

Пример 1. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$.

Выпишем члены ряда по абсолютной величине:

$$\left.\begin{array}{l} 1 > \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{3} > \ldots > \dfrac{1}{n} \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ исходный ряд сходится по теореме Лейбница.}$$

Пример 2. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\dfrac{n^3}{(n+1)!}$.

$\dfrac{1}{2} < \dfrac{4}{3} > \dfrac{9}{8} > \dfrac{8}{15} > \ldots$ – первое условие теоремы выполняется, начиная со второго члена. Для проверки второго условия рассмотрим числовой ряд с положительными членами $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n^3}{(n+1)!}$, который сходится по признаку Даламбера (проверить самостоятельно). Тогда по необходимому признаку сходимости следует выполнимость равенства $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^3}{(n+1)!} = 0$. Итак, исходный ряд сходится по теореме Лейбница для n: $\overline{2;+\infty}$. Добавление к ряду первого члена $u_1 = ½$ не изменит его поведения.

Вернемся к знакопеременным рядам. Знакочередующийся ряд является частным случаем знакопеременного ряда. Будем рассматривать ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$, где $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ могут быть как положительными, так и отрицательными. Сформулируем достаточный признак сходимости знакопеременного ряда.

Теорема. **Если знакопеременный ряд**

$$\boldsymbol{u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots} \qquad \textbf{(2.2)}$$

таков, что ряд, составленный из абсолютных величин его членов

$$\boldsymbol{|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots} \qquad \textbf{(2.3)}$$

сходится, то данный знакопеременный ряд также сходится.

Доказательство. Пусть S_n и σ_n – сумма n-первых членов рядов (2.2) и (2.3). Пусть S'_n – сумма всех положительных, а S''_n – сумма абсолютных величин всех отрицательных членов среди первых n членов данных рядов, тогда $S_n = S'_n - S''_n$, $\sigma_n = S'_n + S''_n$. Так как ряд (2.3) сходится, то $\exists$ конечный $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = \sigma$, но по теореме о пределе суммы следует, что существуют и конечны $\lim\limits_{n\to+\infty} S'_n = S'$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} S''_n = S''$. А значит, существует и конечен $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S'_n - \lim\limits_{n\to+\infty} S''_n = S' - S''$, $\Rightarrow$ знакопеременный ряд (2.2) сходится.

Вывод. Исследование знакопеременного ряда на сходимость сводится к исследованию на сходимость числовых рядов с положительными членами.

Пример 3. Исследовать на сходимость $\sum\limits_{n\to1}^{+\infty} \dfrac{\sin n\alpha}{n^2}$, $\alpha \in R$.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n\to1}^{+\infty} \dfrac{|\sin n\alpha|}{n^2} \le \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$. Последний сходится как обобщенный гармонический ряд. Тогда по теореме сравнения в неравенствах следует, что $\sum\limits_{n\to1}^{+\infty} \dfrac{|\sin n\alpha|}{n^2}$ сходится, а значит, сходится исходный ряд.

Пример 4. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos\left((2n-1)\dfrac{\pi}{4}\right)}{3^n} = \dfrac{\cos\dfrac{\pi}{4}}{3^1} + \dfrac{\cos\dfrac{3\pi}{4}}{3^2} + \dfrac{\cos\dfrac{5\pi}{4}}{3^3} + \ldots$

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\left|\cos(2n-1)\frac{5\pi}{4}\right|}{3^n}\le\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n}$, последний сходится как сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии с $q=\frac{1}{3}$, $\Rightarrow$ по теореме сравнения исходный ряд сходится.

Доказанная теорема является достаточным признаком сходимости знакопеременного ряда, но не необходимым. Можно привести пример таких знакопеременных рядов, которые сами сходятся, а ряды, составленные из абсолютных величин их членов, расходятся. Поэтому имеет смысл ввести понятия об абсолютной и условной сходимости знакопеременного ряда.

Определение. **Знакопеременный ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов:**

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots$$

Определение. **Если же ряд (2.3) расходится, а ряд (2.2) сходится, то знакопеременный ряд называется условно или неабсолютно сходящимся рядом.**

Определение. **Если ряды (2.2) и (2.3) оба расходятся, то ряд (2.2) – абсолютно расходящийся.**

Пример 5. $\sum\limits_{n\to 1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ – условно сходящийся ряд.

Пример 6. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$.

Составим ряд из абсолютных величин членов исходного ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}$, числовой положительный ряд. Применим признак Даламбера:

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0<1$, $\Rightarrow$ сходится, $\Rightarrow$ исходный ряд сходится абсолютно.

Рассмотрим без доказательства наиболее интересные свойства абсолютно и условно сходящихся числовых рядов.

Свойство 1. **Если знакопеременный ряд (2.2) сходится абсолютно, то его сумма не меняется при любой перестановке его членов.**

Свойство 2 (теорема Римана). **Путем перестановки членов условно сходящегося ряда можно получить сходящийся ряд с наперед заданной суммой или ряд расходящийся.**

Покажем свойство 2 на конкретном примере. Рассмотрим условно сходящийся знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n\to 1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$, по теореме Лейбница его сумма $0<S<1$.

Переставим члены ряда и сгруппируем их по трое:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\ldots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=\frac{1}{2}S.$$

Для приближенного вычисления суммы знакочередующегося ряда бывает полезна следующая теорема.

Теорема (оценка остатка знакочередующегося ряда). **Остаток r_n знакочередующегося ряда имеет знак своего первого члена, а по абсолютной величине не превосходит его модуля.**

Иначе $|r_n|<|u_{n+1}|$ (доказать самостоятельно, аналогично теореме Лейбница).

Пример 7. Вычислить сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n}{(1+n^3)^2}$ с точностью $\alpha=10^{-3}$.

Предварительно убедимся, что данный знакочередующийся ряд сходится по теореме Лейбница $\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{2^2} > \dfrac{2}{9^2} > \dfrac{3}{28^2} > \ldots \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\left(1+n^3\right)^2} = 0\end{array}\right\}$, $\Rightarrow$ ряд сходится.

Для нахождения суммы с заданной степенью точности все вычисления выполняем с одной запасной цифрой до тех пор, пока не будет выполняться неравенство $|r_n| < |u_{n+1}| < 10^{-3}$.

$$S = -\frac{1}{4} + \frac{2}{81} - \frac{3}{28^2} + \frac{4}{65^2} - \frac{5}{126^2} + \ldots \approx -0{,}25 + 0{,}0247 - 0{,}0038 + \underset{<10^{-3}}{0{,}0003} \approx$$

$$\approx -0{,}2291 \approx -0{,}229.$$

Для достижения заданной точности достаточно найти сумму первых трех членов исходного ряда.

Пример 8. Сколько слагаемых нужно взять, чтобы вычислить сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n!}$ с точностью 10^{-2}.

Воспользуемся неравенством $|r_n| < |u_{n+1}| < \dfrac{1}{100} \Rightarrow \dfrac{1}{(n+1)!} < \dfrac{1}{100} \Rightarrow$ $(n+1)! > 100$. Данное неравенство выполняется при $n = 4$, так как $(4+1)! = 5! = 120 > 100$. Следовательно, достаточно найти сумму первых четырех членов исходного ряда, чтобы получить сумму с точностью 10^{-2}.

Понятие о числовых рядах с комплексными членами

Определение: **Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n + ib_n) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n + i\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$, члены которого $z_n = a_n + ib_n$ ($a_n, b_n \in \mathrm{R}$) – комплексные числа, называется рядом с комплексными членами. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ называется действительной частью ряда, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ – его мнимой частью.**

Составим сумму n-первых членов ряда: $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} z_k=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k+i\sum\limits_{k=1}^{n} b_k$. Предел $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ существует тогда и только тогда, когда существуют пределы $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ и $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} b_k$. Но существование последних пределов означает сходимость рядов $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$. Следовательно, ряд с комплексными членами сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды, составленные из действительных и мнимых частей членов ряда.

Пример 9. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{i}{n(n+1)}\right)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}+i\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}$ – сходится как сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии с $q=\frac{1}{2}<1$. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ – сходится по теореме сравнения в предельной форме, сравнить с рядом $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$. Значит, исходный ряд есть ряд сходящийся. Сумма первого ряда $S_1=\frac{1/2}{1-1/2}=1$. Сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ найдена раньше: $S_2=1$. Итак, сумма исходного ряда $S=S_1+iS_2=1+i$.

Пример 10. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{i}{n+1}\right)$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right)$ сходится (см. предыдущий пример), ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)$ расходится как остаток гармонического ряда. Значит, исходный ряд расходится.

Замечание. Данный материал может быть предложен в качестве реферата, так как не является обязательным.

Задания для самостоятельного решения

Выяснить, какие из указанных рядов сходятся абсолютно, какие не абсолютно, какие расходятся

1. $1-\frac{1}{3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}+\ldots$

2. $1-\frac{1}{3^3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^3}+\ldots$

3. $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)}+\ldots$

4. $\frac{\sin a}{1}+\frac{\sin 2a}{4}+\ldots+\frac{\sin na}{n^2}+\ldots$

5. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n}+\ldots$

6. $2-\frac{3}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n}+\ldots$

7. $-1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\ldots+(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$

8. $\frac{1}{2}-\frac{8}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n}+\ldots$

9. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$

10. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n^2}{n!}$

3. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

3.1 Функциональные ряды: основные понятия. Нахождение области сходимости

Пусть $u_1(x)$, $u_2(x)$, …, $u_n(x)$ … – некоторая последовательность функций.

Определение. **Выражение вида**

$$\boldsymbol{u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)} \qquad (3.1)$$

называется функциональным рядом.

Если вместо x в данный ряд подставить конкретное число $x = x_0$, то получим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0), \qquad (3.2)$$

который мы можем исследовать на сходимость.

Определение. **Функциональный ряд (3.1) называется сходящимся в точке x_0, если в этой точке x_0 сходится соответствующий числовой ряд (3.2). Точка x_0 называется точкой сходимости исходного функционального ряда.**

Пример 1. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$ – геометрическая прогрессия с $q = x$, если $|x| < 1$ – ряд сходится, $|x| > 1$ – ряд расходится, $x = \pm 1$ – расходится.

Ряд сходится при $\forall\, x \in (-1; +1)$.

Определение. **Множество всех точек сходимости функционального ряда называется его областью сходимости.**

Пример 2. Исследовать на сходимость функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2x-1}{3x+2}\right)^n$ в точках $x = 1$ и $x = -2$.

При $x = 1$ получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n5^n}$ – числовой знакоположительный ряд.

Сравним его с рядом $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{5^n}$ – сходится как сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $\begin{matrix} n\cdot 5^n \ge 5^n \\ \dfrac{1}{n\cdot 5^n} \le \dfrac{1}{5^n} \end{matrix}$.

По теореме сравнения в неравенствах исходный ряд в точке $x = 1$ сходится.

В точке $x = -2$ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\frac{(-5)^n}{(-4)^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{5}{4}\right)^n$.

Применим локальный признак Коши:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}\frac{5}{4} = \frac{5}{4} > 1 \text{ – расходится.}$$

Конечная сумма $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ называется n-ной частичной суммой функционального ряда. А функция $S(x)$ = $\lim_{n\to+\infty} S_n(x)$ называется суммой ряда. Таким образом, $S(x)$ = $=\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ при условии сходимости ряда на некотором множестве $\{x\}$.

Функция $r_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ называется остатком функционального ряда после n-ного члена.

Справедлива *теорема:* **Если функциональный ряд сходится на некотором множестве $\{x\}$, то на нем сходится любой его остаток. Верно и обратное, т.е. если сходится любой остаток функционального ряда на $\{x\}$, то сходится и сам функциональный ряд и имеет место формула**

$$\boldsymbol{S(x) = S_n(x) + r_n(x),}$$

где $S(x)$ – сумма ряда; $S_n(x)$ – сумма первых n членов; $r_n(x)$ – сумма остатка.

Доказательство. Пусть функциональный ряд (3.1) сходится на $\{x\}$. Возьмем конкретное фиксированное $x_0 \in \{x\}$, тогда функциональный ряд становится числовым сходящимся рядом. А для числовых рядов такое свойство имеет место (см. "Остаток ряда и его свойства"), ряд и остаток ведут себя одинаково. Проводя аналогичные рассуждения для $\forall\ x \in \{x\}$, мы докажем справедливость теоремы на всем множестве $\{x\}$.

Аналогично, как и для числового ряда, можно показать, что если функциональный ряд сходится, то сумма его остатка стремится к 0 при $n \to +\infty$. Действительно,

$$\lim_{n\to+\infty} r_n(x) = \lim_{n\to+\infty} S(x) - \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = S(x) - S(x) = 0.$$

Как исследовать функциональный ряд на сходимость? Функциональный ряд можно рассматривать как знакопеременный ряд (подставляя вместо x произвольные значения, мы получим числовой ряд с произвольными членами), который исследуют на сходимость с помощью следующего достаточного условия: Если ряд из абсолютных величин сходится, то и сам знакопеременный ряд сходится и притом абсолютно.

Определение. **Функциональный ряд (3.1) называется абсолютно сходящимся на множестве $\{x\}$, если в каждой точке этого множества сходится ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n(x)|$.**

Не очень удобно исследовать функциональный ряд в каждой точке из его области определения и делать вывод о его поведении.

Как с помощью признака Даламбера найти интервал сходимости функционального ряда?

Функциональному ряду поставим в соответствие ряд, составленный из абсолютных величин его членов:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n(x)|.$$

Такой ряд для каждого конкретного x является знакоположительным числовым рядом, к которому применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|<1$$

При всех значениях x, когда предел меньше единицы, функциональный ряд сходится, причем абсолютно, а само множество полученных значений x является его интервалом сходимости. Чтобы найти область сходимости, нужно исследовать функциональный ряд на концах интервала.

Получить интервал сходимости функционального ряда можно, используя локальный признак Коши $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}|u_n(x)|$:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}<1.$$

Решая полученное неравенство относительно переменной x также получим множество тех и только тех значений переменной x, при которых сходится ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n(x)|$, а значит, исходный функциональный ряд будет сходиться абсолютно на полученном множестве.

Пример 3. Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2x-1}{3x+2}\right)^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left|\frac{2x-1}{3x+2}\right|^n$, $x\neq-\frac{2}{3}$. Применим к полученному числовому ряду с положительными членами локальную теорему Коши:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}\left|\frac{2x-1}{3x+2}\right|^n}=\left|\frac{2x-1}{3x+2}\right|\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}<1.$$

$$-1<\frac{2x-1}{3x+2}<1$$

$$\begin{cases}\dfrac{2x-1}{3x+2}>-1\\ \dfrac{2x-1}{3x+2}<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2x-1}{3x+2}+1>0\\ \dfrac{2x-1}{3x+2}-1<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2x-1+3x+2}{3x+2}>0\\ \dfrac{2x-1-3x-2}{3x+2}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{5x+1}{3x+2}>0\\ \dfrac{-x-3}{3x+2}<0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(3x+2)(5x+1)>0\\ (3x+2)(x+3)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left(-\infty;-\dfrac{2}{3}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{5};+\infty\right)\\ x\in(-\infty;-3)\cup\left(-\dfrac{2}{3};+\infty\right)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty;-3) \cup \left(-\frac{1}{5};+\infty\right) \text{ – интервал сходимости}$$

$$\left(-\frac{2}{3} \notin \text{найденному интервалу}\right).$$

Выясним поведение ряда на концах интервала:

$x=-3$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{-6-1}{-9+2}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ – расходится как гармонический ряд;

$x = -\frac{1}{5}$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{-\frac{2}{5}-\frac{5}{5}}{-\frac{3}{5}+\frac{10}{5}}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{-\frac{7}{5}}{\frac{7}{5}}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ – знакочередующийся ряд сходится по теореме Лейбница.

Область сходимости: $x \in (-\infty;-3) \cup \left[-\frac{1}{5};+\infty\right)$.

Пример 4. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{|x|^n}{n!}$.

Применим признак Даламбера

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{|x|^n}=|x|\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=|x|\cdot 0=0<1 \text{ – сходится}$$

$$\text{при } \forall\, x \in R.$$

Область абсолютной сходимости $(-\infty;+\infty)$.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n^2x)}{n^2} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{|\sin n^2x|}{n^2} \le \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ – сходится как обобщенный гармонический ряд. Тогда по теореме сравнения в неравенстве исходный ряд сходится абсолютно на множестве R.

Пример 6. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n+x^2}$

При $x = 0$ ряд сходится по определению, при $x > 0$ – сравнить

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ – расходится, при $x<0$ – аналогично, расходится.

Итак, ряд сходится в единственной точке $x=0$.

Вывод. Функциональный ряд либо всюду сходится, либо всюду расходится, либо существует множество (интервал), внутри которого ряд сходится, а вне его расходится или наоборот. Концы множества (интервала) требуют дополнительного исследования.

Задания для самостоятельного решения

Определить область сходимости функциональных рядов

1. $1+x+\ldots+x^n+\ldots$
2. $\ln x+\ln^2 x+\ldots+\ln^n x+\ldots$
3. $x+x^4+\ldots+x^{n^2}+\ldots$
4. $x+\frac{x^2}{2^2}+\ldots+\frac{x^n}{n^2}+\ldots$
5. $x+\frac{x^2}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{x^n}{\sqrt{n}}+\ldots$

3.2 Степенные ряды. Теорема Абеля. Интервал сходимости. Операции над степенными рядами

Определение. **Ряд вида**

$$\boldsymbol{a_0+a_1(x-\alpha)+a_2(x-\alpha)^2+\ldots+a_n(x-\alpha)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-\alpha)^n,} \qquad (3.3)$$

где a_n, α – действительные числа, членами которого являются степенные функции, называется степенным рядом по степеням $(x-\alpha)$, а числа a_n – коэффициентами степенного ряда.

При $\alpha=0$ получаем степенной ряд по степеням x:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n. \qquad (3.4)$$

Так как заменой $X=(x-\alpha)$ ряд (3.3) можно свести к ряду (3.4), то ограничимся рассмотрением рядов типа (3.4).

Можно заметить, что степенной ряд (3.4) всегда сходится в точке

$x = 0$. При $x \neq 0$ он может как сходиться, так и расходиться.

Для степенных рядов справедлива *теорема Абеля:* **Если степенной ряд (3.4) сходится в точке $x_0 \neq 0$, то он сходится абсолютно в интервале $-|x_0| < x < |x_0|$ и равномерно на отрезке $[-q; q] \in (-|x_0|; |x_0|)$.**

Опустим доказательство приведенной теоремы. Рассмотрим следствие из нее.

Следствие. Если в точке $x_0 \neq 0$ степенной ряд (3.4) расходится, то он расходится во всех точках x: $|x| > |x_0|$, т.е. в интервале $(-\infty; -|x_0|) \cup (|x_0|; +\infty)$.

Действительно, если бы в точке x степенной ряд сходился, то он бы сходился абсолютно в интервале $(-|x_0|; |x_0|)$, вне этого интервала степенной ряд расходился.

Из теоремы Абеля следует, что если степенной ряд сходится хотя бы в одной точке $x \neq 0$, то всегда существует число $R > 0$, такое, что степенной ряд сходится (абсолютно) для всех $x \in (-R; R)$ и расходится для всех $x \in (-\infty; -R) \cup (R; +\infty)$.

При $x = \pm R$ ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Пример 7. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|^n}{2^n}.$$

По локальной теореме Коши: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \frac{1}{2}|x| < 1$. $|x| < 2$

$x \in (-2; 2)$. $x = 2$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 1$ – расходится; $x = -2$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ – расходится по Лейбницу.

Область абсолютной сходимости $(-2; 2)$, вне ее ряд расходится.

Равномерно сходится по любому отрезку, целиком принадлежащему интервалу сходимости.

Пример 8. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|x|^n}{n!}.$$

Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{|x|^n}=|x|\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0<1 \text{ при } \forall\ x\in R.$$

Область сходимости $(-\infty;+\infty)$.

Пример 9. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty}n^n x^n \ \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}n^n|x|^n.$$

Применим локальную теорему Коши:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\lim_{n\to+\infty}n|x|=+\infty>1 \text{ при } \forall\ x \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ряд всюду расходится, кроме $x=0$.

Пример 10. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)^5x^{2n}}{2n+1}.$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{(n+1)^5}{2n+1}\cdot x^{2n}}=x^2\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^{5/n}}{(2n+1)^{1/n}}=x^2<1,\ \ |x|<1\ \ x\in(-1;1).$$

$x=\pm1$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)^5}{2n+1}$; $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^5}{2n+1}=\infty\neq0$, $\Rightarrow$ ряд расходится.

Область сходимости совпадает с интервалом сходимости $x\in(-1;1)$.

Пример 11. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\cos\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}(x-2)^n.$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\lim_{n\to+\infty}\left(\left|\cos\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}\right|\right)^{\frac{1}{n}}|x-2|=|x-2|(\cos0)^0=|x-2|<1\Rightarrow$$

$$-1<x-2<1\ \Rightarrow\ 1<x<3\ \Rightarrow\ x\in(1;3).$$

Исследуем ряд на концах интервала:

$x=1$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\cos\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\cos0=1\neq0$, $\Rightarrow$ ряд расходится по теореме Лейбница.

$x = 3\ \sum_{n=1}^{+\infty}\cos\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ расходится по следствию из необходимого признака сходимости.

Ответ: $x \in (1;\,3)$.

Примеры показывают, что степенной ряд либо всюду сходится, либо всюду расходится, кроме $x = 0$, либо существует интервал радиуса R, внутри которого $(-R;\,R)$ степенной ряд сходится, а вне его расходится.

Радиусом сходимости степенного ряда (3.4) называют неотрицательное число R такое, что степенной ряд (3.4) сходится в $(-R;\,R)$, а сам интервал $(-R;\,R)$ – **интервалом сходимости** степенного ряда.

Если степенной ряд (3.4) сходится только в точке $x = 0$, то $R = 0$, если же он сходится для всех $x \in R$, то $R = \infty$.

Для нахождения радиуса сходимости степенного ряда используют признаки Даламбера и Коши. Предположим, что существует предел $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n||x|^n} = |x|\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} < 1$. Тогда для всех x

$$|x| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} \Rightarrow R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Аналогично по признаку Даламбера $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\left|a_n x^n\right|$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, если $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ существует и конечен, то, решая неравенство $|x|\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, $|x| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ получим интервал сходимости $(-R;\,R)$, где $R = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Пример 12. Найти радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-3)^n}{n5^n}$.

$$a_n=\frac{1}{n5^n},\quad a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)5^{n+1}}\quad \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\quad\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)5^{n+1}}{n5^n}=5.$$

Тогда $|x-3|<5$, $R=5$, $-5<x-3<5$.

$-2<x<8$ – интервал сходимости.

Исследуем на концах интервала

$x=-2$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-5)^n}{n5^n}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ – сходится по теореме Лейбница.

$x=8$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ – расходится как гармонический.

Область абсолютной сходимости: $[-2;8)$.

Свойства степенных рядов

1. Степенной ряд сходится абсолютно во всякой точке внутри интервала сходимости.

2. Степенной ряд сходится равномерно на любом отрезке, принадлежащем целиком интервалу сходимости (см. теорему Абеля).

3. Сумма степенного ряда есть непрерывная функция внутри интервала сходимости.

4. Операции почленного дифференцирования и интегрирования на любом промежутке $[x_0;x]\in(-R;R)$ степенного ряда (3.4) не изменяют его радиуса сходимости.

5. Если радиус сходимости степенного ряда (3.4) отличен от нуля, то степенной ряд можно почленно дифференцировать на интервале сходимости и для его суммы $S(x)$ справедливо равенство

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\cdot n\cdot x^{n-1}.$$

6. Степенной ряд (3.4) можно почленно интегрировать по любому отрезку $[0;x]$, принадлежащему интервалу сходимости.

Пример 13. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(n^2+9n+5\right)x^{n+1}$

а) найдем интервал сходимости ряда:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left((n+1)^2+9n+14\right)|x|^{n+2}}{\left(n^2+9n+5\right)|x|^{n+1}}=|x|<1,\quad x\in(-1;1).$$

$x=\pm1$ расходится, так как $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2+9n+5\right)=+\infty\neq 0$;

б) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}n^2x^{n+1}+9\sum\limits_{n=0}^{+\infty}nx^{n+1}+5\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^{n+1}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}x^{n+1}=x+x^2+x^3+\ldots+x^{n+1}+\ldots=\frac{x}{1-x}\quad\forall\ x\in(-1;1);$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}x^n x=\frac{x}{1-x}.\quad x\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\frac{x}{1-x},\quad x\neq0;$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\frac{1}{1-x}\Rightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

$$5\sum_{n=0}^{+\infty}x^{n+1}=\frac{5x}{1-x}.$$

Умножим обе части равенства $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$ на $9x^2$, получим $9\sum\limits_{n=0}^{+\infty}nx^{n+1}=\frac{9x^2}{(1-x)^2}$

Умножим обе части равенства $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$ на x, получим $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}$.

Продифференцируем полученный ряд:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}n^2x^{n-1}=\frac{(1-x)^2+2(1-x)x}{(1-x)^4}=\frac{1-x+2x}{(1-x)^3}=\frac{x+1}{(1-x)^3}.$$

Умножим обе части на x^2: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}n^2x^{n+1}=\frac{x^3+x^2}{(1-x)^3}$.

Складывая полученные равенства, будем иметь

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(n^2+9n+5\right)x^{n+1}=\frac{x^3+x^2}{(1-x)^3}+\frac{9x^2}{(1-x)^2}+\frac{5x}{1-x},\text{ для } \forall\ x\in(-1;\,1).$$

Задания для самостоятельного решения

Найти интервалы сходимости степенных рядов

1. $10x + 100x^2 + \ldots + 10^n x^n + \ldots$

2. $x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots$

3. $x+\frac{x^2}{20}+\ldots+\frac{x^n}{n\cdot 10^{n-1}}+\ldots$

4. $1 + x + \ldots + n!\,x^n + \ldots$

5. $1 + 2x^2 + \ldots + 2^{n-1}x^{2(n-1)} + \ldots$

6. $x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}+\ldots$

7. $1 + 3x + \ldots + (n-1)3^{n-1}x^{n-1} + \ldots$

8. $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{x^n}{n(n+1)}+\ldots$

9. $x+\frac{(2x)^2}{2!}+\ldots+\frac{(nx)^n}{n!}+\ldots$ При исследовании сходимости на правом конце интервала учесть, что факториалы больших чисел могут быть выражены приближенно формулой Стирлинга: $n!\approx\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$.

10. $x + 4x^2 + \ldots + (nx)^n + \ldots$

11. $\frac{\ln 2}{2}x^2+\frac{\ln 3}{3}x^3+\ldots+\frac{\ln(n+1)}{n+1}x^{n+1}+\ldots$

12. $2x+\left(\frac{9}{4}x\right)^2+\ldots+\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n x\right]^n+\ldots$

4. РАЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННОЙ РЯД

4.1 Ряды Тейлора и Маклорена

Определение. **Говорят, что функция $y = f(x)$ разлагается в степенной ряд в окрестности точки a, если существует степенной ряд вида:**

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n,$$

сумма которого в окрестности точки a совпадает с функцией $f(x)$, т.е. выполняется равенство

$$f(x) = = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots$$

Теорема. **Если функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд в окрестности точки a, то такой степенной ряд единственный и коэффициенты ряда находятся по следующим формулам:**

$$a_0 = f(a),\ a_1 = \frac{f^{I}(a)}{1!},\ a_2 = \frac{f^{II}(a)}{2!},\ \ldots,\ a_n = \frac{f^{n}(a)}{n!} + \ldots$$

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд: $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots$ в окрестности точки a. Так как степенной ряд можно почленно дифференцировать внутри интервала сходимости, то:

$$f^{I}(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + \ldots + a_n n(x-a)^{n-1} + \ldots$$
$$f^{II}(x) = 2a_2 + 3\cdot 2a_3(x-a) + \ldots + a_n n(n-1)(x-a)^{n-2} + \ldots$$
$$f^{III}(x) = 3\cdot 2a_3 + 4\cdot 3\cdot 2a_4(x-a) + \ldots + a_n n(n-1)(n-2)(x-a)^{n-3} + \ldots \text{ и т.д.}$$
$$f^{n}(x) = a_n\, n\,(n-1)(n-2)(n-3)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 + (n+1)n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2a_{n+1}(x-a).$$

Найдем $f(a)$ и всех ее производных:

$$\left.\begin{array}{l} f(a)=a_0 \\ f^{I}(a)=a_1 \\ f^{II}(a)=2\cdot 1\cdot a_2 \\ f^{III}(a)=3\cdot 2\cdot 1\cdot a_3 \\ \ldots \\ f^{n}(a)=n(n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot a_n \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} a_0 = f(a) \\ a_1 = \dfrac{f^{I}(a)}{1!} \\ a_2 = \dfrac{f^{II}(a)}{2!} \\ \ldots \\ a_n = \dfrac{f^{n}(a)}{n!} \end{array}$$

Таким образом, мы доказали, что если функция $y = f(x)$ разлагается в степенной ряд в окрестности точки a, то коэффициенты разложения однозначно определяются через значения функции и ее производных в данной точке, следовательно, данное разложение единственно и имеет место равенство:

$$f(x)= f(a)+\frac{f^{I}(a)}{1!}(x-a)+\frac{f^{II}(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots \quad (4.1)$$

Полученный ряд называется рядом Тейлора для функции $y = f(x)$.

Полагая $a = 0$, получим разложение функции в ряд Маклорена:

$$f(x)= f(0)+\frac{f^{I}(0)}{1!}x+\frac{f^{II}(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{n}(0)}{n!}x^n+\ldots \quad (4.2)$$

Функция $y = f(x)$ называется порождающей для соответствующего ряда.

Пример 1. Составить ряд Маклорена для функции $y = x \sin x$. Воспользуемся формулой (4.2), найдем значения функции и всех ее производных в точке $x = 0$.

	$y(0) = 0$
$y^{I}(x) = \sin x + x\cos x$	$y^{I}(0) = 0$
$y^{II}(x) = 2\cos x - x\sin x$	$y^{II}(0) = 2$
$y^{III}(x) = -3\sin x - x\cos x$	$y^{III}(0) = 0$
$y^{IV}(x) = -4\cos x + x\sin x$	$y^{IV}(0) = -4$
$y^{V}(x) = 5\sin x + x\cos x$	$y^{V}(0) = 0$
$y^{VI}(x) = 6\cos x - x\sin x$	$y^{VI}(0) = 6$
$y^{VII}(x) = -7\sin x - x\cos x$	$y^{VII}(0) = 0$
$y^{VIII}(x) = -8\cos x + x\sin x$	$y^{VIII}(0) = -8$ и т.д.

Из приведенных вычислений усматривается следующая закономерность: при $x = 0$ значения производных нечетного порядка равны 0, значения производных четного порядка численно совпадают с порядком производной, только чередуются по знаку. Таким образом, функция $y = x\sin x$ порождает ряд Маклорена вида:

$$x\sin x = \frac{2}{2!}x^2 - \frac{4}{4!}x^4 + \frac{6}{6!}x^6 + \ldots = \frac{1}{1}x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \frac{x^8}{7!} + \frac{x^{10}}{9!} - \frac{x^{12}}{11!} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n-1)!}$$

Область сходимости полученного ряда к порождающей функции найти самостоятельно.

Многочлены Тейлора. Формула Тейлора

Если функция $f(x)$ разлагается в ряд Тейлора, то имеет место равенство

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{I}(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots = T_n(x) + R_n(x), \quad (4.3)$$

где $T_n(x)$ – n-ная частичная сумма ряда Тейлора, которая называется **многочленом Тейлора n-ной степени**, а $R_n(x)$ – **остаток ряда**.

Многочлены Тейлора степени n могут быть составлены для любой функции $f(x)$, которая имеет в точке $x = a$ производные до n-ного порядка включительно. Для таких функций можно записать следующее равенство:

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{I}(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x), \qquad (4.4)$$

где $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$.

Определение. **Формула (4.4) называется формулой Тейлора, а $R_n(x)$ – остаточным членом формулы Тейлора.**

Известны различные выражения для оценки остаточного члена $R_n(x)$ формулы Тейлора. Чаще всего для приближенных вычислений применяется оценка остаточного члена в форме Лагранжа: Если функция $y = f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки a производные до $(n + 1)$-ного порядка включительно, то для любого x из этой окрестности имеет место равенство

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x - a))}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}, \text{ где } 0 < \theta < 1.$$

В окрестности точки $a = 0$ эта формула будет иметь вид

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta \cdot x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Сходимость ряда Тейлора к порождающей функции

Пусть дана функция $y = f(x)$, которая имеет в точке $x = a$ производные любого порядка. Тогда для нее можно составить ряд Тейлора или ряд Маклорена. Возникает вопрос, всегда ли составленный ряд Тейлора сходится к порождающей функции? Ответ на него дает следующая *теорема:* **Для того чтобы функция $y = f(x)$ разлагалась в степенной ряд в окрестности точки a, необходимо и достаточно:**

1) чтобы она имела в этой окрестности производные любого порядка;

2) чтобы остаточный член $R_n(x)$ формулы Тейлора стремился к нулю при $n \to +\infty$, при любых x из этой окрестности (без доказательства).

Учитывая сформулированную теорему, мы можем записать **правило разложения $f(x)$ в степенной ряд в окрестности точки a**

1. Найти производные всех порядков и их значения в точке a.

2. Формально записать ряд Тейлора для функции $y = f(x)$

$$f(x) \sim \ldots$$

3. Найти область сходимости полученного ряда.

4. Доказать, что $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$ при $\forall$ x из области сходимости, тогда можно приближенное равенство заменить на точное:

$$f(x) = \ldots$$

Разложения в ряд Маклорена некоторых элементарных функций

1. Рассмотрим разложение функции $y = e^x$ в степенной ряд в окрестности нуля:

а) найдем производные до n-ного порядка включительно:

$y^I(x) = e^x$, $\qquad y(0) = 1$,

$y^{II}(x) = e^x$, $\qquad y^I(0) = y^{II}(0) = \ldots = y^n(0) = 1$,

$\ldots$,

$y^n(x) = e^x$;

б) формально запишем ряд Тейлора:

$$e^x \sim 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x),\quad n:\ \overline{0;+\infty};$$

в) найдем интервал сходимости по признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{|x|^n}=|x|\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0<1 \text{ при } \forall\ x \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ряд сходится на $(-\infty; +\infty)$;

г) докажем, что $R_n(x) \to 0$ при $n \to +\infty$:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta\cdot x)}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}.$$

Так как $0 < \theta < 1$, то при каждом фиксированном x, например при $x > 0$, $\Rightarrow$ $0 < \theta x < x$ $\Rightarrow$ функция $e^{\theta x}$ – ограниченная функция. $\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ является $(n + 1)$-ным членом рассматриваемого ряда. А так как мы доказали его сходимость, то с ростом номера n его n-ный член, а значит, и $(n + 1)$-ный член, будет $\to 0$ при $n \to +\infty$.

Следовательно, $\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ – бесконечно малая величина при $n \to +\infty$. Тогда $R_n(x) \to 0$ при $n \to +\infty$ как произведение функции, ограниченной на бесконечно малую при $n \to +\infty$. Значит, разложение функции $y = e^x$ в степенной ряд в окрестности нуля имеет вид

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad \forall\ x \in (-\infty;\ +\infty) \tag{4.5}$$

и сумма данного ряда совпадает с функцией $y = e^x$.

2. Разложим функцию $y = \sin x$ в степенной ряд в окрестности нуля:

а) найдем производные всех порядков:

$y(0) = 0,$

$y^I(x) = \cos x,\qquad y^I(0) = 1,$

$y^{II}(x) = -\sin x,\qquad y^{II}(0) = 0,$

$y^{III}(x) = -\cos x,\qquad y^{III}(0) = -1,$

$y^{IV}(x) = \sin x,\qquad y^{IV}(0) = 0,$

$y^V(x) = \cos x,\qquad y^V(0) = 1$ и т.д.

б) формально запишем ряд Тейлора:

$$\sin x \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \quad n : \overline{1;+\infty};$$

в) найдем интервал сходимости полученного ряда по признаку Даламбера:

$$u_n = (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \qquad u_{n+1} = (-1)^{n+2}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\frac{(2n-1)!}{(-1)^{n+1}|x|^{2n-1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{x^2}{(2n+1)2n} = 0 < 1$$

при $\forall\ x \in (-\infty;\ +\infty) \Rightarrow$ ряд сходится;

г) покажем, что $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, исследуем его на сходимость по признаку Даламбера $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{|x|^{2n+1}} = x^2\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+3)} = x^2\cdot 0 = 0 < 1,$$

$\Rightarrow$ ряд сходится при $\forall\ x \in (-\infty;\ +\infty)$.

Тогда по необходимому признаку сходимости числовых рядов n-ный член ряда $\to 0$ при $n \to +\infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$ при $\forall$ фиксированном $x \in (-\infty; +\infty)$.

Найдем $\lim\limits_{n\to+\infty} R_{2n+1}(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sin\left(\theta x + (2n+1)\dfrac{\pi}{2}\right)\right)\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$ как произведение функции, ограниченной на функцию бесконечно малую при $n \to +\infty$.

Поэтому разложение функции $y = \sin x$ в степенной ряд имеет вид

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \quad \forall\ x \in (-\infty; +\infty) \quad (4.6)$$

3. Разложение функции $y = \cos x$ в ряд Маклорена получим, используя свойства степенных рядов, а именно: "Если радиус сходимости степенного ряда отличен от нуля, то степенной ряд можно почленно дифференцировать, что не изменяет его радиус сходимости".

Продифференцируем обе части равенства (4.6)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots \quad \forall\ x \in (-\infty; +\infty) \quad (4.7)$$

4. Разложим в ряд Маклорена функцию $y = (1 + x)^m$, где m – произвольное постоянное число:

$y(0) = 1^m = 1,$

$y^I = m(1 + x)^{m-1},$

$y^{II} = m(m-1)(1 + x)^{m-2},$

$y^{III} = m(m-1)(m-2)(1 + x)^{m-3}$ и т.д.,

$y^n = m(m-1)(m-2)\ \ldots\ (m-(n-1))\cdot(1 + x)^{m-n} = m(m-1)(m-2)\ \ldots\ (m-n+1)(1 + x)^{m-n}$ и т.д.,

$y^I(0) = m,$

$y^{II}(0) = m(m-1),$

$y^{III}(0) = m(m-1)(m-2),$

$y^n = m(m-1)(m-2)\ \ldots\ (m-n+1),$

$$(1+x)^m \sim 1+\frac{mx}{1!}+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots+$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots \qquad (4.8)$$

По признаку Даламбера найдем область сходимости полученного ряда:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(m-n)x^{n+1}}{(n+1)!}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{n!}{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(m-n)x}{(n+1)}\right|=|-1|\cdot|x|=|x|<1\Rightarrow$$
$$x\in(-1;+1),\quad \text{если}\quad \begin{cases} m\le -1, & -1<x<1;\\ -1<m<0, & -1<x\le 1;\\ m\ge 0, & -1\le x\le 1.\end{cases}$$

Примем без доказательства, что $R_n(x)\underset{n\to+\infty}{\to}0$, а значит, ряд (4.8) сходится к порождающей функции. Полученный ряд называется биномиальным.

5. Указанный способ разложения функций $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=e^x$, $y=(1+x)^m$ в степенной ряд может быть применен к произвольной функции. Однако в отдельных случаях обоснования сходимости полученного степенного ряда к порождающей функции могут оказаться очень громоздкими. Поэтому разложение других функций в ряд Маклорена можно получить, выполняя те или иные преобразования над уже имеющимися разложениями.

Так, например, разложение $\ln(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$ находят путем операций интегрирования степенных рядов, а $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$ – используя разложение $y=e^x$ в ряд Маклорена.

Найдем разложение в степенной ряд функций $y=\operatorname{sh} x$ и $y=\operatorname{ch} x$:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \quad \forall\ x\in R,\ n:\overline{0;+\infty};$$
$$e^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

Так как

$$y=\operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad (4.9)$$

$$\forall\ x\in(-\infty;\ +\infty);$$

$$y=\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (4.10)$$

6. Разложим функцию y = arctg x в ряд Маклорена, используя свойства степенных рядов.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}(b_n):b_1=1\\ q=-x^2\\ \text{если } |q|=\left|x^2\right|<1\Rightarrow x\in(-1;1)\end{array}\right\}=S(x)=\frac{1}{1+x^2}\ \text{– ряд сходится.}$$

Проинтегрируем его по $[0;\ x]\in(-1;\ 1)$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\int_0^x\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\Big|_0^x=\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}0=\operatorname{arctg}x;$$

$$\operatorname{arctg}x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}+\ldots,\ \ x\in(-1;1). \qquad (4.11)$$

Непосредственно подстановкой можно убедиться, что в точках $x=\pm1$ полученный знакочередующийся ряд сходится по теореме Лейбница. Поэтому равенство (4.11) справедливо при $\forall\ x\in[-1;\ 1]$.

7. Получим разложение в ряд Маклорена функции $y=\ln(1+x)$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots=\left\{\begin{array}{c}(b_n):b_1=1\\ q=-x\\ |q|=|x|<1\Rightarrow\\ \text{ряд сходится}\end{array}\right\}=\frac{1}{1+x};$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x}\quad\forall\ \ x\in(-1;1).$$

Проинтегрируем его почленно по $[0;x]\in(-1;1)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\int_0^x\frac{dx}{1+x}=\ln|1+x|-\ln 1;$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad (4.12)$$

или $\ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots\ \ \forall\ x\in(-1;\,1).$

Можно показать, что при $x = 1$ соответствующий знакочередующийся ряд сходится, следовательно, разложение (4.12) справедливо при $x\in(-1;\,1]$.

Если в полученном равенстве переменную x заменить на $(-x)$, то получим ряд

$$\ln(1-x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(-x)^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{2n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=$$

$$=-\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ldots-\frac{x^{n+1}}{n+1}-\ldots, \qquad (4.13)$$

который сходится $\forall\ x\in[-1;\,1)$.

Пример 2. Разложить функцию $(2-e^x)^2$ по степеням x в ряд Маклорена.

$$(2-e^x)^2=4-4e^x+e^{2x}$$

Воспользуемся разложением в ряд Маклорена функции e^x:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Положим $x = 2x$ в обе части равенства:

$$e^{2x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2x)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^nx^n}{n!}=1+\frac{2x}{1!}+\frac{4x^2}{2!}+\frac{8x^3}{3!}+\ldots$$

$$(2-e^x)^2=1+\frac{2x}{1!}+\frac{4x^2}{2!}+\frac{8x^3}{3!}+\ldots+\frac{2^nx^n}{n!}+\ldots+4-4-\frac{4x}{1!}-\frac{4x^2}{2!}-\frac{4x^3}{3!}-$$

$$-\ldots-\frac{4x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^nx^n}{n!}-4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2^nx^n}{n!}-\frac{4x^n}{n!}\right)=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\left(2^n-4\right).$$

Пример 3. Разложить функцию $(x-1)\operatorname{ch} x$ по степеням x в ряд Маклорена.

$$y = (x-1)\operatorname{ch} x = x \operatorname{ch} x - \operatorname{ch} x$$

Используем разложение $y = \operatorname{ch} x$:

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!};$$

$$(x-1)\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Пример 4. Разложить функцию $\frac{3}{2-x-x^2}$ по степеням x в ряд Маклорена.

Разложим знаменатель дроби на множители:

$$y = \frac{3}{2-x-x^2} = \frac{-3}{x^2+x-2} = \frac{-3}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2+x} + \frac{1}{1-x} =$$

$$= \frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}\right)} + \frac{1}{1-x}.$$

$\frac{1}{1+\frac{x}{2}}$ рассмотрим как сумму членов геометрической прогрессии с

$b_1=1,\quad q = -\frac{x}{2},\quad |q| = \left|\frac{x}{2}\right| < 1,\quad |x| < 2$ – интервал сходимости.

$$\frac{1}{1+\frac{x}{2}} = 1 - \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^n \quad \forall\, x \in (-2;2).$$

$\frac{1}{1-x}$ рассмотрим как сумму членов геометрической прогрессии с

$b_1=1,\quad q = x,\quad |q| = |x| < 1,\quad x \in (-1;\, 1).$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

Тогда $\dfrac{3}{2-x-x^2}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{2^n}+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\dfrac{1}{2^{n+1}}+1\right]x^n,$
$\forall\ x\in(-1;1)$.

Задания для самостоятельного решения

1. Разложить функцию $y=\ln x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x=1$ (при $x_0=1$).

2. Разложить данные функции в ряд Тейлора в окрестности точки $x=0$ (ряд Маклорена):

   а) $y=\cos(x-\alpha)$;

   б) $y=e^x\sin x$.

3. Найти первые пять членов ряда Тейлора для функции $y=\ln(1+e^x)$ в окрестности точки $x=0$.

4. Разложить функцию $y=\cos^2 x$ в окрестности точки $x=0$ в ряд Маклорена.

5. Пользуясь формулой разложения в ряд Маклорена функции $(1+x)^m$, разложить в окрестности $x=0$ функции:

   а) $y=\sqrt{1+x^2}$;

   б) $y=\sqrt[3]{8-x^3}$.

4.2 Применение степенных рядов к приближенным вычислениям

Рассмотрим основные применения степенных рядов к приближенным вычислениям.

Вычисление приближенных значений функций

Пример 5. Вычислить приближенное значение $\sin 10^\circ$ с точностью $\alpha=10^{-5}$.

Воспользуемся формулой разложения в степенной ряд функции

$y = \sin x$: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \ \forall \ x \in R.$

Полагая $x = \frac{\pi}{18}$, получим $\sin 10 = \sin \frac{\pi}{18} = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 \ldots$

Так как ряд знакочередующийся, то используем известное правило: "Чтобы получить сумму знакочередующегося ряда с заданной степенью точности, необходимо потребовать выполнимость неравенств $|r_n(x)| < \alpha,$ но $|r_n(x)| < |u_{n+1}(x)| \Rightarrow |u_{n+1}(x)| < \alpha$".

Итак, абсолютная величина первого отброшенного члена не должна превосходить заданную степень точности, т.е. 10^{-5}.

Оценим члены ряда, при этом значение числа π будем брать с шестью знаками после запятой, т.е. с одной запасной цифрой: $\pi = 3{,}141593$.

$$\sin \frac{\pi}{18} \approx \frac{3{,}141593}{18} - \frac{1}{6}\left(\frac{3{,}141593}{18}\right)^3 + \frac{1}{120}\left(\frac{3{,}141593}{18}\right)^5 - \ldots =$$

$$= 0{,}174533 - 0{,}000886 + 0{,}0000013 \approx 0{,}17365$$

Пример 6. Вычислить значение числа e с точностью 0,001, если известно, что $e < 3$.

Воспользуемся разложением функции $y = e^x$ в ряд Маклорена: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$ где остаток ряда может быть оценен по формуле Лагранжа: $R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}.$

Полагая $x = 1$, получим: $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$ В полученной сумме необходимо взять столько слагаемых, чтобы $R_n(x) = R_n(1) < 10^{-3}$.

$$R_n(1) = \frac{e^{\theta}}{(n+1)!} < 10^{-3}, \text{ где } 0 < \theta < 1,$$

$$e^0 < e^{\theta} < e < 3,$$

$$\frac{e^{\theta}}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{1000},$$

$$\frac{(n+1)!}{3} > 1000,$$

$$(n + 1)! > 3000.$$

Оценим, начиная с какого n, будет выполняться полученное неравенство:

при $n = 5$ $6! = 720 < 3000$,

при $n = 6$ $7! = 5040 > 3000$ – истина.

Значит, в записанной сумме нужно посчитать 7 первых слагаемых, включая свободный член:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \approx 2 + 0{,}5 + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} \approx 2{,}718.$$

Приближенное вычисление пределов с помощью степенных рядов

Пример 7. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}$ [подставляя разложение $y = e^x$ и $y = \sin x$ в степенной ряд, получим] =

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots\right) - 2 - 2x - x^2}{x - \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{3!}x^3 + \frac{2x^4}{4!} + \ldots + \frac{2x^n}{n!} + \ldots}{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{3!} + \frac{2}{4!}x + \ldots + \frac{2}{n!}x^{n-3} + \ldots}{\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n+1)!} + \ldots} = \frac{2}{3!}\cdot 3! = 2$$

Пример 8. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \operatorname{arctg} x}{x^3} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{arctg}x}{x^3}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots-\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}-\ldots}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3!}\right)+x^5\left(\frac{1}{5!}-\frac{1}{5}\right)+x^7\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{7!}\right)+\ldots}{x^3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}.$$

Приближенное вычисление определенных интегралов

Пример 9. Вычислить $\int\limits_0^1\frac{\sin x}{x}dx$ с точностью $\alpha = 10^{-4}$.

Данный интеграл относится к разряду неберущихся, т.е. не может быть выражен в конечном виде через элементарные функции:

$$\int\limits_0^1\frac{\sin x}{x}dx\approx\int\limits_0^1\frac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{x}dx=\int\limits_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}dx=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\int\limits_0^1 x^{2n}dx\right)\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\left.\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}\right|_0^1=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)}=1-\frac{1}{3!\cdot 3}+\frac{1}{5!\cdot 5}-\frac{1}{7!\cdot 7}+\ldots\approx 1-\frac{1}{18}+\frac{1}{600}-\frac{1}{35280}\approx$$

$$\approx 0{,}94612\approx 0{,}9461$$

Пример 10. Вычислить $\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ с точностью $\alpha = 10^{-4}$.

Воспользуемся биноминальным рядом: $(1+x)^m=1+\frac{mx}{1!}+$

$$+\frac{m(m-1)x^2}{2!}+\frac{m(m-1)(m-2)x^3}{3!}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)x^4}{4!}+\ldots$$

Полагая: $x = x^4$, $m = -\frac{1}{2}$, $\forall\ x \in (-1;\, 1]$,

$$\left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2!}x^8 - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{x^{12}}{3!} + \ldots$$

Подставим под знак определенного интеграла и проинтегрируем почленно:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \approx \left. x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{3}{8}\cdot\frac{x^9}{9} - \frac{15}{8}\cdot\frac{x^{13}}{6\cdot 13} + \ldots \right|_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^6}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{2^9} - \frac{5}{16}\cdot\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{2^{13}} + \ldots \approx 0{,}49688 \approx 0{,}4969$$

Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов

Предположим, что нужно найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка $y^{II} = F(x, y, y^I)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y^I(x_0) = y^I{}_0$.

Искомое решение $y = f(x)$ будем искать в виде ряда Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^I(x_0)(x - x_0)}{1!} + \ldots + \frac{f^n(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + \ldots$$

Найдем его коэффициенты:

$$f(x_0) = y(x_0) = y_0, \quad f^I(x_0) = y^I(x_0) = y^I{}_0, \quad f^{II}(x_0) = F(x_0, y_0, y^I{}_0).$$

Для нахождения всех оставшихся коэффициентов дифференцируют обе части исходного уравнения, используя основные теоремы дифференциального исчисления.

Пример 11. Найти первые пять членов решения дифференциального уравнения $y^{II} = y\cdot y^I - x^2$, где $y(0) = 1$, $y^I(0) = 1$.

Воспользуемся рядом Маклорена:

$$y(x) = y(0) + \frac{y^I(0)\cdot x}{1!} + \frac{y^{II}(0)}{2!}x^2 + \frac{y^{III}(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{y^n(0)\cdot x^n}{n!} + \ldots$$

$y^{II}(0) = 1 - 0 = 1$

$y^{III}(x) = y\cdot y^{II} + (y^I)^2 - 2x$, $\qquad y^{III}(0) = 1 + 1 - 0 = 2$

$y^{IV}(x) = y^I\cdot y^{II} + y\cdot y^{III} + 2(y^I)\cdot y^{II} - 2$, $\qquad y^{IV}(0) = 1 + 2 + 2 - 2 = 3$

$$y(x) \sim 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{2x^3}{3!}+\frac{3x^4}{4!}+\ldots$$

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислить с точностью до 0,0001:

а) $\sqrt[4]{17}$; б) $\operatorname{arctg} 0{,}2$;

в) $\sin 0{,}4$; г) $\ln 1{,}1$;

д) e.

2. Пользуясь разложением функций в ряд Тейлора, вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(\operatorname{tg}x-\sin x)-x^3}{x^5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x+x^2\right)+\ln\left(1-x+x^2\right)}{x\left(e^x-1\right)}$; г) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$;

д) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$; е) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\operatorname{ctg}x}{x}\right)$;

ж) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2+\cos x}{x^3\sin x}-\dfrac{3}{x^4}\right)$.

3. С помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд вычислите с точностью 0,001 значения следующих интегралов:

а) $\int\limits_0^1 \cos\sqrt{x\,dx}$; б) $\int\limits_0^{2,5}\ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx$;

в) $\int\limits_0^{0,2}\sqrt[3]{1+x^2dx}$; г) $\int\limits_0^{x} e^{-t^2}\,dt$.

4. Почему функцию $y=\sqrt{x}$ нельзя разложить в ряд Маклорена? Можно ли разложить в этот ряд функцию $y=\sqrt[3]{x^{1000}}$?

5. Найти первые три члена разложения в степенной ряд решений дифференциальных уравнений, удовлетворяющих заданным начальным условиям:

а) $y' - y^2 = x(x+1), \quad y(0) = 1;$

б) $y' + y^2 = e^x, \quad y(0) = 0;$

в) $y'' + y \cdot \cos x = x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$

г) $y'' + y' \cdot \sin x = 1 - y, \quad y(0) = y'(0) = 1.$

4.3 Индивидуальное задание по разделу "Ряды"

Курс математики занимает ведущее место среди фундаментальных наук в техническом вузе. От качества усвоения этого курса зависит качество дальнейшей учебной и профессиональной деятельности студентов, так как данный предмет является основой как для смежных общетеоретических дисциплин, так и для общепрофессиональных и специальных дисциплин.

Важным фактором усвоения математики и овладения ее методами является самостоятельная работа студентов. Система типовых расчетов (ТР), как показывает опыт целого ряда вузов нашей страны, активизирует самостоятельную работу студентов и способствует более глубокому изучению курса высшей математики.

Цель ТР по теме "Ряды" состоит в том, чтобы познакомить студентов с рядами числовыми – знакоположительными и знакочередующими, функциональными и степенными; показать приемы исследования их на сходимость, а также применения их к приближенным вычислениям. Приступая к выполнению задания, необходимо повторить теоретические вопросы:

1) Числовые ряды: сходимость и сумма ряда;

2) Теоремы сравнения знакоположительных рядов;

3) Признаки Д’Аламбера и Коши;

4) Интегральный признак Коши;

5) Теорема Лейбница. Оценка остатка знакочередующегося ряда;

6) Функциональные ряды: основные определения. Область сходимости функционального ряда;

7) Степенные ряды. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимо-

сти степенного ряда;

8) Свойства степенных рядов.

9) Разложение функции в степенной ряд. Ряды Тейлора и Маклорена. Условия разложения функции в ряд Тейлора;

10) Разложение в ряд Маклорена некоторых основных элементарных функций;

11) Применение степенных рядов к приближенным вычислениям: значений функций, определенных интегралов, пределов, частных решений дифференциальных уравнений.

Задачи индивидуального домашнего задания, предложенные ниже, соответствуют учебному пособию Л.А. Кузнецова "Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты" издательства "Лань", 2005 г. Номер варианта студента соответствует порядковому номеру его фамилии в журнале успеваемости преподавателя.

Приведем примеры решения типовых задач.

Задача 1. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{72}{n^2+5n+4}. \tag{4.14}$$

Решение. Имеем числовой знакоположительный ряд. Исследуем его на сходимость, применив признак сравнения в предельной форме. Рассмотрим ряды (4.14) и

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}. \tag{4.15}$$

Ряд (4.15) сходится как обобщенный гармонический ряд: $\alpha = 2>1$.

Найдем $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U_n}{V_n}$, где U_n и V_n – соответственно n-ые члены рядов (4.14) и (4.15).

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{72n^2}{n^2+5n+4} \underset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{72}{1+\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}} = 72 > 0$ и конечен, следовательно, ряды ведут себя одинаково. Итак, ряд (4.14) сходится. Найдем его сумму по определению: $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, где $S_n = U_1 + U_2 +...+ U_n$ – n-ая частичная сумма ряда.

Для вычисления S_n разложим $U_n = \dfrac{72}{n^2+5n+4}$ на простейшие дроби.

$$U_n = \frac{72}{(n+1)(n+4)} = \frac{72}{3}\left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+4}\right] = 24\left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+4}\right],$$

тогда $S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n =$

$$= 24\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right] + 24\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right] + 24\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right] + 24\left[\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right] + 24\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{9}\right] + \ldots +$$

$$+ 24\left[\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}\right] + 24\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right] + 24\left[\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+4}\right] =$$

$$= 24\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{6}-\frac{1}{9}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+4}\right] =$$

$$= 24\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right] = 12+8+6-24\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}\right) =$$

$$= 26 - 24\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}\right).$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 26$ – конечен, а сумма ряда (4.14) $S = 26$.

Задача 2. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sqrt{n^3+2}}{n^2(2+\sin n)}$.

Решение. Имеем числовой знакоположительный ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n^3+2}}{n^2(2+\sin n)} = \frac{\sqrt{3}}{2+\sin 1} + \frac{\sqrt{10}}{2^2(2+\sin 2)} + \ldots$$

Оценим n-ый член ряда: $-1 \le \sin n \le 1$, то $1 \le 2 + \sin n \le 3$.

$$U_n = \frac{\sqrt{n^3+2}}{n^2(2+\sin n)} = \frac{\sqrt{n^3\left(1+\dfrac{2}{n^3}\right)}}{n^2(2+\sin n)} = \frac{n\sqrt{n}\cdot\sqrt{1+\dfrac{2}{n^3}}}{n^2(2+\sin n)} = \frac{\sqrt{1+\dfrac{2}{n^3}}}{\sqrt{n}(2+\sin n)} >$$

$$> \frac{1}{\sqrt{n}\left(2+\sin n\right)} \geq \frac{1}{3\sqrt{n}}.$$

Применим признак сравнения рядов в неравенствах. Рассмотрим два числовых ряда: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n^3+2}}{n^2\left(2+\sin n\right)}$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3\sqrt{n}}$ – расходится как обобщенно-гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, где $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, умноженный на $\frac{1}{3}$. Тогда по признаку сравнения числовых рядов с положительными членами из расходимости ряда с меньшими членами следует расходимость ряда с большими членами.

Итак, исходный ряд есть ряд расходящийся.

Задача 3. Исследовать ряд на сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \arcsin \frac{n}{\left(n^2+3\right)^{5/2}}$.

Решение. Преобразуем n-ый член ряда:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \arcsin \frac{n}{\left(n^2+3\right)^{5/2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \arcsin \frac{n}{n^5\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{5/2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \arcsin \frac{1}{n^4\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{5/2}}.$$

Сравним данный ряд с рядом $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ в предельной форме. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ – сходится как обобщенно-гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, где $\alpha = 4 > 1$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\arcsin \frac{1}{n^4\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{5/2}}}{\frac{1}{n^4}} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}$$

$$= \left\{ \lim_{n\to+\infty} \frac{\arcsin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{z\to 0} \frac{\arcsin z}{z} = 1 \right\} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\arcsin \dfrac{1}{n^4\left(1+\dfrac{3}{n^2}\right)^{5/2}}}{\dfrac{1}{n^4\left(1+\dfrac{3}{n^2}\right)^{5/2}}} \cdot \frac{1}{\left(1+\dfrac{3}{n^2}\right)^{5/2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(1+\dfrac{3}{n^2}\right)^5}} = 1 > 0$$

и конечен, следовательно, ряды ведут себя одинаково. Исходный ряд есть ряд сходящийся.

Задача 4. Исследовать ряд: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1\cdot 4\cdot \ldots \cdot (3n-2)}{2^{n+1}\cdot n!}$.

Решение. Имеем числовой ряд с положительными членами, выпишем его несколько первых членов:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 4\cdot \ldots \cdot (3n-2)}{2^{n+1}\cdot n!} = \frac{1}{2^2\cdot 1!} + \frac{1\cdot 4}{2^3\cdot 2!} + \frac{1\cdot 4\cdot 7}{2^4\cdot 3!} + \ldots$$

Для исследования применим признак Д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n-2)\cdot (3n+1)}{2^{n+2}\cdot (n+1)!} \cdot \frac{2^{n+1}\cdot n!}{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n-2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (3n+1)\cdot \frac{1}{2}\cdot \frac{n!}{n!(n+1)} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n+1} = \frac{3}{2} > 1,$$

следовательно, ряд расходится.

Задача 5. Исследовать ряд на сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^4 \cdot \operatorname{arctg}^{2n} \dfrac{\pi}{4n}$.

Решение. Применим локальную теорему Коши. Для этого вычислим:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to+\infty} \operatorname{arctg}^2 \frac{\pi}{4n} \cdot \sqrt[n]{n^4} =$$

$$=\left\{\begin{array}{l} y=n^{4/n} \\ \ln y=\frac{4}{n}\ln n \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4\ln n}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4}{n}=0 \\ \ln y\to 0,\ \ y\to e^0=1 \end{array}\right\}=0\cdot 1=0<1,$$

по указанному признаку исходный ряд сходится.

Задача 6. Исследовать на сходимость ряд: $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{3n}{\left(n^2-2\right)\ln\left(2n\right)}$.

Решение. Оценим n-ый член ряда

$$\left(n^2-2\right)\cdot\ln(2n)<n^2\cdot\ln 2n$$

$$\frac{1}{\left(n^2-2\right)\ln\left(2n\right)}>\frac{1}{n^2\ln\left(2n\right)}$$

$$\frac{3n}{\left(n^2-2\right)\ln 2n}>\frac{3n}{n^2\cdot\ln 2n}=\frac{3}{n\ln 2n} \tag{4.16}$$

Исследуем числовой ряд на сходимость, n-ый член которого равен $U_n=\frac{3}{n\ln 2n}$.

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{3}{n\ln 2n}.$$

Применим интегральную теорему Коши, где $f(x)=\frac{3}{x\ln 2x}$ на $[2;+\infty)$, непрерывна, положительна, монотонно убывающая функция.

Значит, исходный ряд сходится или расходится вместе с несобственным интегралом:

$$\int_2^{+\infty}\frac{3}{x\ln 2x}dx=\int_2^{+\infty}\frac{3\cdot d(\ln 2x)}{\ln 2x}=3\ln\left|\ln|2x|\right|\Big|_2^{+\infty}=$$

$$=3\ln\ln(+\infty)-3\ln\ln 4=+\infty.$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{3}{n\ln 2n}$ расходится, а значит, исходный ряд расходится по теореме сравнения в неравенствах, см. (4.16).

Задача 7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \cdot \frac{n^3}{(n+1)!}$.

Решение. Данный ряд знакочередующийся. Для исследования на сходимость применим теорему Лейбница. Проверим выполнимость условий указанной теоремы:

1. Сравним члены ряда по абсолютной величине.

$$U_2 = \frac{2^3}{3!} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \approx 1{,}33;$$

$$U_3 = -\frac{3^3}{4!} = -\frac{27}{24} = -\frac{9}{8} \approx -1{,}125;$$

$$U_4 = \frac{4^3}{5!} = \frac{16}{30} \approx 0{,}53 \text{ и т.д.}$$

Члены ряда убывают по абсолютной величине.

2. Вычислим $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \pm \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^3}{(n+1)!}$. Покажем, что дробь стремится к нулю. Для этого исследуем ряд $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^3}{(n+1)!}$ на сходимость по признаку Д'Аламбера.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^3}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+2} = 0 < 1,$$

следовательно, числовой ряд $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^3}{(n+1)!}$ сходится. Тогда по необходимому признаку сходимости числовых рядов с положительными членами следует, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^3}{(n+1)!} = 0$.

Таким образом, оба условия признака Лейбница выполняются, а, значит, исходный знакочередующийся ряд сходится.

Задача 8. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(1+n^3)^2}$ с точностью $\alpha = 0{,}001$.

Решение. Сначала убедимся в сходимости исходного ряда. Ряд знакочередующийся, поэтому исследуем его на сходимость по теореме Лейбница аналогично примеру 7.

1. $\frac{1}{2^2} > \frac{2}{9^2} > \frac{3}{28^2} > \ldots > \frac{n}{(1+n^3)^2} > \ldots$, члены ряда убывают по абсолютной величине.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{(1+n^3)^2} = 0$. Значит, ряд сходится. Для нахождения суммы ряда с заданной степенью точности все вычисления производим с одной запасной цифрой, то есть с четырьмя знаками после запятой, а результат округлим до тысячных.

$$S = -\frac{1}{4} + \frac{2}{81} - \frac{3}{28^2} + \frac{4}{65^2} - \frac{5}{126^2} + \ldots \approx$$

$$\approx -0{,}25 + 0{,}0247 - 0{,}0038 + 0{,}0009 - \ldots \approx -0{,}25 + 0{,}0247 - 0{,}0038 \approx$$

$$\approx -0{,}2291 \approx -0{,}229.$$

В записанной сумме берем столько слагаемых, чтобы абсолютная величина первого отброшенного члена не превосходила заданной степени точности.

$$a_4 = 0{,}0009 = 9 \cdot 10^{-4} < \alpha = 0{,}001.$$

Задача 9. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{\left(n^2 + \sqrt{n} + 1\right)^{x+1}}$.

Решение. Преобразуем n-ный член данного функционального ряда:

$$U_n(x) = \frac{n^3}{\left(n^2 + \sqrt{n} + 1\right)^{x+1}} = \frac{n^3}{\left(n^2\left(1 + \frac{1}{n\sqrt{n}} + \frac{1}{n^2}\right)\right)^{x+1}} =$$

$$= \frac{n^3}{n^{2x+2}\left(1 + \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{n^2}\right)^{x+1}} = \frac{1}{n^{2x-1}\left(1 + \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{n^2}\right)^{x+1}}.$$

Сравним данный ряд с рядом $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2x-1}}$, который сходится при $2x-1>1$ или $x \in (1;+\infty)$. Тогда исходный ряд будет сходящимся на интервале $(1;+\infty)$ по теореме сравнения в предельной форме.

При $x=1$ ряд принимает вид $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{\left(n^2+\sqrt{n}+1\right)^2}$ и является расходящимся по признаку сравнения в предельной форме $\left(\text{сравнить с рядом } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ самостоятельно}\right)$.

Итак, область сходимости исходного ряда есть интервал $(1;+\infty)$.

Задача 10. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^5}{2n+1} \cdot x^{2n}$.

Решение. Данный ряд является степенным рядом – частный случай функционального. Поэтому задача решается с помощью признака Д'Аламбера или локальной теоремы Коши.

Применим признак Д'Аламбера к ряду, составленному из абсолютных величин членов исходного ряда:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^5}{2n+1} \cdot |x|^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^5}{2n+1} \cdot x^{2n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)^5}{\left(2(n+1)+1\right)} \cdot x^{2(n+1)} \times \frac{2n+1}{(n+1)^5 \cdot x^{2n}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)^5}{(n+1)^5} \cdot \frac{2n+1}{2n+3} \cdot x^2 = x^2.$$

Чтобы ряд сходился, составим и решим неравенство

$$x^2 < 1,$$

$$|x| < 1.$$

или $-1 < x < 1$ – это есть интервал сходимости ряда.

Исследуем ряд на концах полученного интервала. При $x = \pm 1$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^5}{2n+1} (\pm 1)^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^5}{2n+1}$ – имеем числовой знакоположительный ряд, который расходится по следствию из необходимого признака сходимости, так как $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^5}{2n+1} = \infty \neq 0$.

Итак, в данном случае интервал и область сходимости ряда совпадают: $x \in (-1;1)$.

Задача 11. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{n^3(x^2-4x+7)^n}$.

Решение. Найдем область допустимых значений переменной x: $x^2 - 4x + 7 \neq 0$, Д = 16 – 28 < 0, следовательно, $x^2 - 4x + 7 > 0$ при $\forall\, x \in R$.

Это значит, что исходный ряд при $\forall\, x \in R$ имеет положительные члены. Исследуем его на сходимость по локальной теореме Коши:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{U_n(x)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{n^{\frac{3}{n}}\left(x^2-4x+7\right)} = \frac{4}{n^0\left(x^2-4x+7\right)} = \frac{4}{x^2-4x+7} < 1.$$

Для нахождения интервала сходимости решим неравенство

$$\frac{4}{x^2-4x+7} < 1,$$

$$4 < x^2 - 4x + 7,$$

$$x^2 - 4x + 3 > 0 \text{ для всех } x \in (-\infty;1) \cup (3;+\infty).$$

Исследуем ряд на концах интервала.

При $x = 1$ функциональный ряд становится числовым знакоположительным рядом: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{n^3 \cdot 4^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ – сходится как обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha = 3 > 1$.

При $x = 3$ функциональный ряд принимает аналогичный вид: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{n^3(9-12+7)^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ – сходится.

Итак, областью сходимости исходного функционального ряда является объединение полуинтервалов: $x \in (-\infty;1] \cup [3;+\infty)$.

Задача 12. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin^{n-1} x}{n}$.

Решение. Исследуем ряд на сходимость по теореме Д'Аламбера:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{|\sin x|^n \cdot n}{(n+1)|\sin x|^{n-1}} = |\sin x| \cdot \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = |\sin x| < 1,$$

$$-1 < \sin x < 1,\ x \in R \ \text{ и } \ x \neq \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ n \in Z$$

или
$$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ \ n \in Z.$$

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin^{n-1} x$ и найдем его сумму:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sin^{n-1} x = 1 + \sin x + \sin^2 x + \ldots + \sin^{n-1} x + \ldots =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} (b_n): b_1 = 1 \\ q = \sin x \\ |q| = |\sin x| < 1,\ \ S = \dfrac{b_1}{1-q} \end{array}\right\} = \frac{1}{1-\sin x},\quad \forall\, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\quad n \in Z\,.$$

Степенной ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать по любому отрезку $[x_0;\, x]$, целиком принадлежащему интервалу сходимости.

Умножим обе части предыдущего равенства на $\cos x$, считая $\cos x \neq 0$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin^{n-1} x \cdot \cos x = \frac{\cos x}{1-\sin x}$$

Проинтегрируем последнее равенство по $[0;\, x]$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x \sin^{n-1} \cdot d(\sin x) = -\int_0^x \frac{d(1-\sin x)}{1-\sin x},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left.\frac{\sin^n x}{n}\right|_0^x = -\ln|1-\sin x|\Big|_0^x,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^n x}{n} = -\ln|1-\sin x| + \ln 1 = -\ln|1-\sin x| = -\ln(1-\sin x),$$

так как
$$-1 < -\sin x < 1$$
$$0 < 1-\sin x < 2$$

Тогда искомая сумма равна

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^{n-1} x}{n} = -\frac{\ln(1-\sin x)}{\sin x}$$

для
$$\forall x \in R, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad x \neq \pi n, \quad n \in Z.$$

Задача 13. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+6) \cdot x^{7n}$.

Решение. Исследуем ряд на сходимость по теореме Д'Аламбера:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+7)\cdot|x|^{7n+7}}{(n+6)|x|^{7n}} = |x|^7 \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{n+7}{n+6} = |x|^7 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1.$$

Получаем интервал сходимости (–1; 1), на концах которого ряд расходится (убедиться самостоятельно аналогично предыдущим примерам).

Представим исходный ряд в виде суммы двух степенных рядов и найдем сумму каждого:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+6) \cdot x^{7n} = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} n \cdot x^{7n}}_{(1)} + 6 \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} x^{7n}}_{(2)}$$

Рассмотрим ряд (2):

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{7n} = 1 + x^7 + x^{14} + x^{21} + \ldots + x^{7n} + \ldots = \frac{1}{1-x^7},$$

как сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии (b_n): $b_1 = 1$, $q = x^7$, для всех $x \in (-1;1)$.

Дифференцируя почленно, получим:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 7n \cdot x^{7n-1} = -\frac{1}{(1-x^7)^2} \cdot (1-x^7)' = \frac{7x^6}{(1-x^7)^2}.$$

Разделив обе части равенства на 7 и умножив на x, получим сумму ряда (1):

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n\cdot x^{7n} = \frac{x^7}{\left(1-x^7\right)^2}.$$

Итак,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+6)\cdot x^{7n} = \frac{x^7}{\left(1-x^7\right)^2} + \frac{6}{1-x^7} = \frac{x^7+6\left(1-x^7\right)}{\left(1-x^7\right)^2} = \frac{6-5x^7}{\left(1-x^7\right)^2} \quad \text{для} \quad |x|<1.$$

Задача 14. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x: $y(x) = \dfrac{3}{2-x-x^2}$.

Решение. $$\frac{3}{2-x-x^2} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}\right)} + \frac{1}{1-x}$$

Каждую дробь рассмотрим как сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1-x} = \left\{\begin{matrix}(b_n'):\ b_1=1, \\ q=x,\ |x|<1\end{matrix}\right\} = 1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,$$

$|x|<1$ – область сходимости.

$$\frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \left\{\begin{matrix}(b_n'):\ b_1=1, & \\ q=-\dfrac{x}{2}, & \text{где} \quad \left|\dfrac{x}{2}\right|<1,\ |x|<2\end{matrix}\right\} =$$

$$= 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}-\frac{x^3}{2^3}+\ldots+(-1)^n\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^n+\ldots = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^n}{2^n},$$

где $|x|<2$ – область сходимости.

Тогда $$\frac{3}{2-x-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left((-1)^n\cdot\frac{1}{2^{n+1}}+1\right)\cdot x^n \quad \text{для} \quad \forall x\in(-1;1).$$

Задача 15. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{0,1}\cos\left(100x^2\right)dx$ с точностью $\alpha = 10^{-3}$.

Решение. Воспользуемся разложением подынтегральной функции в степенной ряд:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \quad \text{для} \quad \forall\, x \in R.$$

Тогда

$$\cos\left(100x^2\right) = 1 - \frac{\left(100x^2\right)^2}{2!} + \frac{\left(100x^2\right)^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{\left(100x^2\right)^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

$$\int_0^{0,1} \cos\left(100x^2\right) dx \approx \int_0^{0,1} \left(1 - \frac{10^4 \cdot x^4}{2!} + \frac{10^8 \cdot x^8}{4!} - \frac{10^{12} \cdot x^{12}}{6!} + \frac{10^{16} \cdot x^{16}}{8!} - \ldots\right) dx =$$

$$= x - \frac{10^4 \cdot x^5}{5 \cdot 2!} + \frac{10^8 \cdot x^9}{9 \cdot 4!} - \frac{10^{12} \cdot x^{13}}{13 \cdot 6!} + \frac{10^{16} \cdot x^{17}}{17 \cdot 8!} - \ldots \Big|_0^{0,1} =$$

$$= \frac{1}{10} - \frac{10^4}{5 \cdot 2! \cdot 10^5} + \frac{10^8}{9 \cdot 10^9 \cdot 4!} - \frac{10^{12}}{13 \cdot 6! \cdot 10^{13}} + \frac{10^{16}}{17 \cdot 8! \cdot 10^{17}} - \ldots =$$

$$= \frac{1}{10} - \frac{1}{100} + \frac{1}{2160} - \frac{1}{93600} + \ldots \approx \frac{1}{10} - \frac{1}{100} = 0{,}09.$$

В записанной сумме считаем первых два слагаемых, так как $\frac{1}{2160} < \alpha = \frac{1}{1000}$ по теореме об оценке остатка знакочередующего ряда.

5. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИИ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД ФУРЬЕ

5.1 Представление функции системой базовых функций

Часто при изучении функций появляется необходимость представления данной функции при помощи других функций, которые называются базовыми и свойства которых считаются известными.

Пусть дана система базовых функций:

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots$$

Представить данную функцию $f(x)$ при помощи заданных базовых функций означает разложить функцию $f(x)$ в функциональный ряд:

$$f(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + \ldots,$$

где коэффициенты c_i – действительные числа.

Имея такое представление, можно аппроксимировать данную функцию при помощи частичных сумм соответствующего ряда. Вопрос о том, какими базовыми функциями представлять данную функцию $f(x)$, зависит от свойств самой функции $f(x)$, а также от того, какие задачи необходимо при этом решать. Например, представление функции степенным рядом позволяет вычислять числовые значения функций, приближенное значение интегралов, находить решения дифференциальных уравнений. В случае степенных рядов в качестве базовых служат функции $1,\ x,\ x^2,\ \ldots$ Если изучаемая функция $f(x)$ является периодической (моделирует сложный периодический процесс), то в качестве базовых, естественно, нужно выбрать тригонометрические функции вида

$$A\sin(kx + \alpha) = A\sin\alpha\cos kx + A\cos\alpha\sin kx = a\cos kx + b\sin kx,$$

которые представляют простые гармонические колебания, и представить $f(x)$ в виде ряда $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right)$.

В зависимости от изучаемых функций и поставленных задач рассматриваются и другие последовательности базовых функций.

5.2 Ортогональность тригонометрической системы функций

Часто в качестве базовых функций служат так называемые ортогональные системы функций.

Определение. **Система функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_n(x)$, … называется ортогональной на отрезке [a;b], если для любых натуральных *m, k* имеет место $\int_a^b \varphi_k(x)\varphi_m(x)dx = 0$ при $m \neq k$ и при $m=k$ $\int_a^b \varphi_m^2(x)dx \neq 0$.**

Теорема. **Система тригонометрических функций**

$$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx \cos nx, \ldots \tag{5.1}$$

является ортогональной системой функций на отрезке $[-\pi;\pi]$ (опустим доказательство сформулированной теоремы, учитывая тот факт, что интегралы, записанные ниже, сводятся к табличным, используя формулы тригонометрии).

Приведем значения тех интегралов, которые нам понадобятся в дальнейшем. Каковы бы ни были целые числа m и k, имеют место следующие равенства:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos kx dx = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad m \neq k; \\ \pi, & \text{если} \quad m = k \end{cases} \tag{5.2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin kx dx = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad m \neq k; \\ \pi, & \text{если} \quad m = k \end{cases} \tag{5.3}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos kx dx = 0; \tag{5.4}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = 0; \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = 0. \tag{5.5}$$

5.3 Тригонометрический ряд. Коэффициенты Фурье. Тригонометрический ряд Фурье

Во многих технических задачах возникает необходимость представлять произвольные функции через простейшие периодические функции. Такие задачи часто возникают в электротехнике: представить ток, изменяющийся по сложному закону $I = I(t)$, через простые синусоидальные токи $I_k = \sin(\omega t + \varphi_0)$. Математическим аппаратом для решения таких задач служат ряды, для которых тригонометрические функции (5.1) берутся в качестве базовых.

Определение. **Тригонометрическим рядом называется функциональный ряд вида**

$$\boldsymbol{\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \ldots} \qquad (5.6)$$

Числа $\frac{a_0}{2}$, $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$ называются коэффициентами тригонометрического ряда (5.6).

Допустим, что функция $f(x)$ представляется на отрезке $[-\pi;\pi]$ тригонометрическим рядом

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (5.7)$$

и предположим, что ряд (5.7) на указанном отрезке равномерно сходится, а, значит, его можно почленно интегрировать. Вычислим коэффициенты ряда a_n, b_n. Интегрируя в пределах от $-\pi$ до π обе части равенства (5.7), получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=}^{+\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx + \sum_{n=}^{+\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx.$$

По теореме, учитывая формулы (5.5), получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)d(x) = \frac{a_0}{2}\cdot 2\pi,$$

откуда

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \tag{5.8}$$

Умножая обе части равенства (5.7) на $\cos nx$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, получим

$$f(x)\cos nx = \frac{a_0}{2}\cos nx + a_1\cos x\cos nx + b_1\sin x\cos nx + \ldots \tag{5.9}$$

Интегрируя почленно равенство (5.9) в пределах от $-\pi$ до π, получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx + a_1\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\cos nx\,dx +$$

$$+ b_1\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\cos nx dx + \ldots + a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos nx dx + \ldots \tag{5.10}$$

Согласно формулам (5.2)–(5.5) все слагаемые правой части равенства (5.10) равны нулю, кроме члена $a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx dx = a_n\pi$. Следовательно, из (5.10) получаем $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = a_n\pi$, откуда

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \tag{5.11}$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots$

Заметим, что формула (5.8) является частным случаем формулы (5.11) при $n = 0$. Аналогичным образом, умножая (5.7) на $\sin nx$, получим

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \tag{5.12}$$

где $n = 1,2,3, \ldots$

Числа a_n, b_n, вычисленные по формулам (5.11), (5.12), называются коэффициентами Фурье для функции $f(x)$.

Определение. **Тригонометрический ряд**

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right),$$

коэффициенты которого совпадают с коэффициентами Фурье для функции $f(x)$, вычисленными по формулам (5.8), (5.11), (5.12), называется рядом Фурье функции $f(x)$.

Таким образом, каждой функции $f(x)$, для которой существуют интегралы (5.11), (5.12), можно сопоставить ее ряд Фурье. При этом функция $f(x)$ называется порождающей функцией своего ряда Фурье.

Пример 1. Составить ряд Фурье для функции $f(x)=x$ на отрезке $[-\pi;\pi]$.

По формуле (5.8) имеем $a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}x\,dx=\frac{1}{\pi}\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-\pi}^{\pi}=0.$

По формуле (5.11) получаем

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\left.\frac{x\sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right)=\frac{1}{\pi}\cdot 0+\left.\frac{\cos nx}{\pi n^2}\right|_{-\pi}^{\pi}=$$

$$=0+\frac{\cos n\pi}{\pi n^2}-\frac{\cos n\pi}{\pi n^2}=0.$$

Далее, по формуле (5.12)

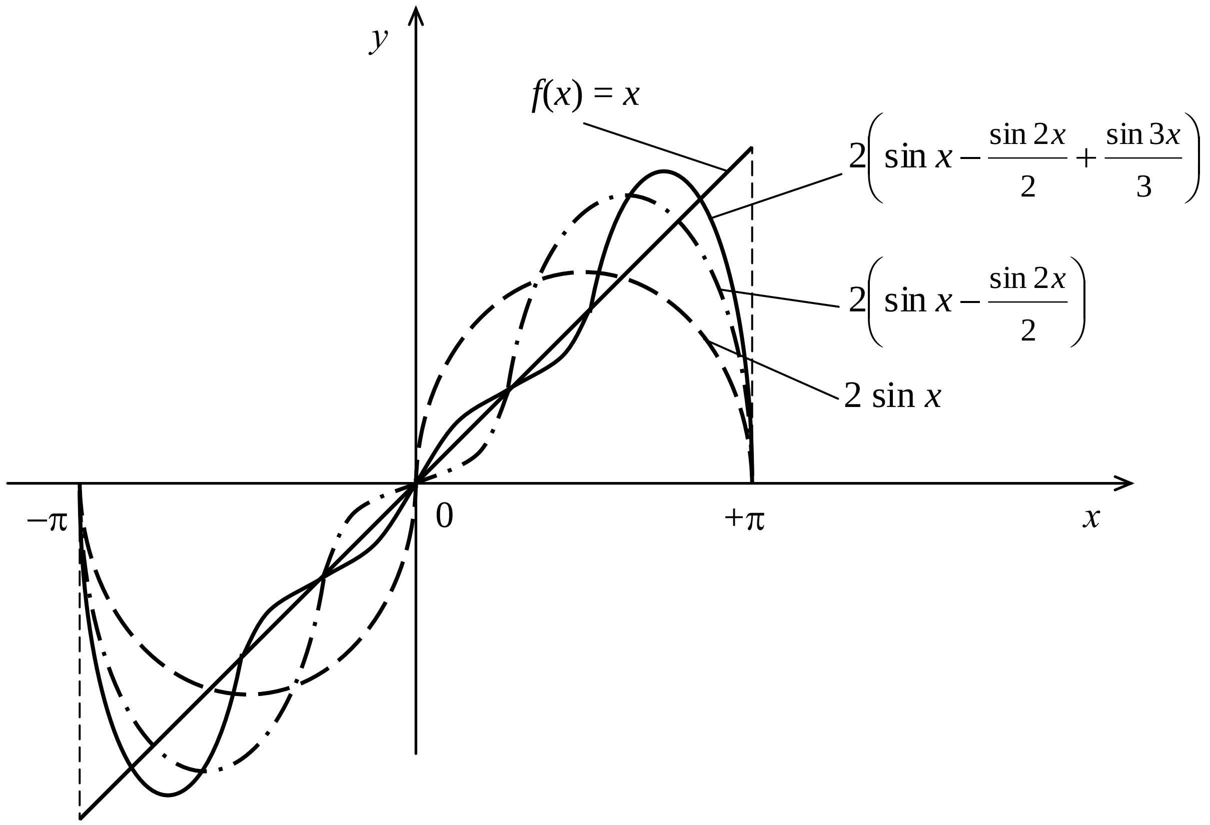
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\left.\frac{x(-\cos nx)}{n}\right|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi(-\cos n\pi)}{n}+\frac{\pi(-\cos(-n\pi))}{n}\right)+\left.\frac{\sin nx}{\pi n^2}\right|_{-\pi}^{\pi}=-\frac{2\cos n\pi}{n}+0=\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2}{n}.$$

Следовательно, функции $f(x)=x$ соответствует ряд Фурье вида

$$2\cdot\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}+\ldots\right).$$

На рис. 5.1 показан график функции $f(x)=x$ и частичные суммы соответствующего ей ряда Фурье, содержащие один, два и три члена. Из рисунка видно, как графики частичных сумм ряда приближаются к графику функции $f(x)$ при увеличении числа слагаемых суммы.



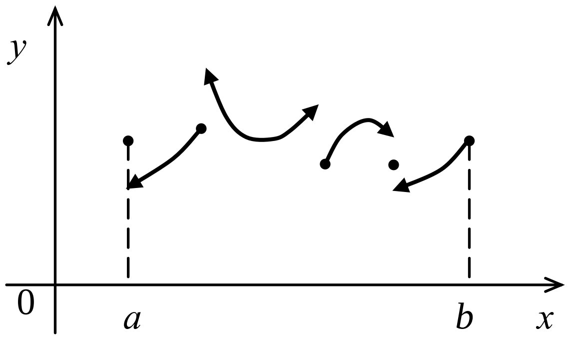
Р и с. 5.1

5.4 Разложение в ряд Фурье функций, заданных на отрезке [–π; π]

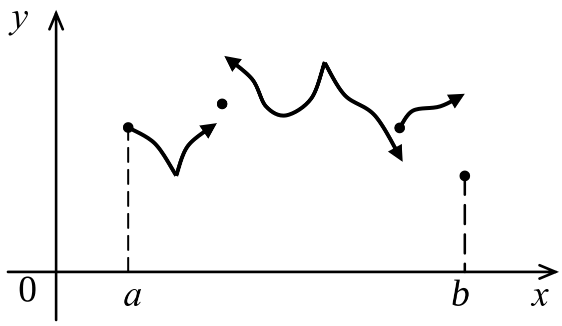
Как в случае ряда Тейлора, ряд Фурье не всегда сходится к порождающей функции. Для формулировки условий сходимости ряда Фурье к порождающей функции введем некоторые дополнительные понятия.

Определение. **Функция $f(x)$ называется кусочно-непрерывной на отрезке [a; b], если она имеет конечное число точек разрыва первого рода на данном отрезке** (рис. 5.2, 5.3).

Определение. **Функция $f(x)$ называется кусочно-дифференцируемой или кусочно-гладкой на отрезке [a; b], если ее производная является кусочно-непрерывной функцией на [a; b].**



Р и с. 5.2



Р и с. 5.3

Следующие теоремы Дирихле представляют собой достаточные условия поточечной сходимости ряда к порождающей функции, за исключением, быть может, точек разрыва и границ отрезка.

Теорема. **Если функция $f(x)$ кусочно-дифференцируема на отрезке $[-\pi; \pi]$, то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится во всех точках $x \in [-\pi; \pi]$, причем в точках непрерывности функции $f(x)$ его сумма равна $f(x)$, в точках разрыва функции $f(x)$ – $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, на концах отрезка – $\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$.**

Определение. **Функция $f(x)$ называется кусочно-монотонной на отрезке [a; b], если его можно разбить на конечное число интервалов так, что на каждом из интервалов функция монотонна.**

Теорема. **Если функция $f(x)$ кусочно-монотонна и ограничена на отрезке $[-\pi; \pi]$, то ряд Фурье для этой функции сходится во всех точках $x \in [-\pi; \pi]$, причем в точках непрерывности его сумма равна $f(x)$, в точках разрыва функции $f(x)$ – $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, на концах отрезка – $\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$.**

Сформулированные теоремы мы принимаем без доказательства.

Таким образом, если функция $f(x)$ кусочно-дифференцируема или ограничена и кусочно-монотонна на отрезке $[-\pi; \pi]$, то на этом отрезке имеет место разложение

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right), \tag{5.7}$$

причем коэффициенты a_n и b_n вычисляются по формулам (5.8), (5.11) и (5.12). Равенство (5.7) может нарушиться только в точках разрыва функции $f(x)$ и на концах отрезка $[-\pi;\pi]$.

Так как функция $f(x)=x$ дифференцируема на отрезке $[-\pi;\pi]$, то из примера 1 получаем разложение

$$x=2\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}+\ldots\right).$$

При этом значение полученного ряда на концах интервала равно

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{-\pi+\pi}{2}=0,$$

следовательно, сумма ряда равна значению порождающей функции $f(x)=x$ для всех точек интервала $(-\pi;\pi)$.

Заметим, что большинство функций, которые встречаются в математике и ее приложениях, являются кусочно-дифференцируе-мыми функциями, поэтому для них ряд Фурье сходится к порождающей функции в обычном смысле.

5.5 Разложение в ряд Фурье функций, заданных на отрезке $[-\ell;\ell]$

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[-\ell;\ell]$. Тогда подстановкой $x=\frac{\ell}{\pi}t$ переходим к функции $f\left(\frac{\ell t}{\pi}\right)$, которая определена на отрезке $[-\pi;\pi]$. В самом деле, если $t=-\pi$, то $x=-\ell$, если $t=\pi$, то $x=\ell$ и при $-\pi<t<\pi$ имеем $-\ell<x<\ell$.

Предположим, например, что исходная функция $f(x)$ кусочно-дифференцируема на отрезке $[-\ell;\ell]$, тогда и полученная функция $f\left(\frac{\ell t}{\pi}\right)$, на отрезке $[-\pi;\pi]$ будет кусочно-дифференцируемой. Разлагая функцию $f\left(\frac{\ell t}{\pi}\right)$, в ряд Фурье на отрезке $[-\pi; \pi]$, получим (всюду, за исключением, быть может, точек разрыва функции и концов отрезка $[-\pi; \pi]$):

$$f\left(\frac{\ell t}{\pi}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos nt + b_n \sin nt\right),$$

где $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell t}{\pi}\right)\cos nt\, dt$, $n = 0, 1, 2, \ldots$;

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell t}{\pi}\right)\sin nt\, dt, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Перейдем к переменной x. Имеем $t = \frac{\pi x}{\ell}$, $dt = \frac{\pi}{\ell}dx$ и при этом $t = -\pi \Rightarrow x = -\ell$, $t = \pi \Rightarrow x = \ell$. Итак,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{\ell}x + b_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x\right), \tag{5.13}$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x \cdot \frac{\pi}{\ell}dx = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\, dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots; \tag{5.14}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x \cdot \frac{\pi}{\ell}dx = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\, dx, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{5.15}$$

Таким образом, функцию $f(x)$, определенную на отрезке $[-\ell; \ell]$, можно разложить в ряд Фурье (5.13), коэффициенты которого вычисляются по формулам (5.14), (5.15). Равенство (5.13) может нарушиться лишь в точках разрыва функции и на концах отрезка $[-\ell; \ell]$.

Пример 2. Разложить функцию $f(x) = x$ на интервале $(-1; 1)$ в ряд Фурье.

По формуле (5.13) (при $\ell = 1$) имеем

$$f(x) = x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x\right).$$

Вычислим коэффициенты ряда по формулам (5.14), (5.15):

$$a_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} x\cos n\pi x\,dx = x\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\bigg|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{\sin n\pi x}{n\pi}dx = \frac{\cos n\pi x}{n^2\pi^2}\bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{1}{n^2\pi^2}\left(\cos n\pi - \cos(-n\pi)\right) = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} x\sin n\pi x\,dx = -x\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\bigg|_{-1}^{1} + \frac{1}{n\pi}\int_{-1}^{1}\cos n\pi x\,dx = -\frac{\cos n\pi}{n\pi} -$$

$$-\frac{\cos(-n\pi)}{n\pi} + \frac{1}{(n\pi)^2}\sin n\pi x\bigg|_{-1}^{1} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Таким образом,

$$f(x) = x = \frac{2}{\pi}\left(\sin \pi x - \frac{\sin 2\pi x}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{\sin n\pi x}{n} + \ldots\right) \text{ для } -1 < x < 1.$$

5.6 Разложение в ряд Фурье периодических функций

Если функция $f(x)$ является периодической с периодом $T = 2\pi$, $f(x + 2k\pi) = f(x)$ и для нее имеет место разложение в ряд Фурье на отрезке $[-\pi; \pi]$, то оно справедливо и на всей прямой $(-\infty; \infty)$.

В самом деле, сумма тригонометрического ряда Фурье $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{\ell}x + b_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right)$, если она существует, является периодической функцией с периодом 2π. Это следует из того, что

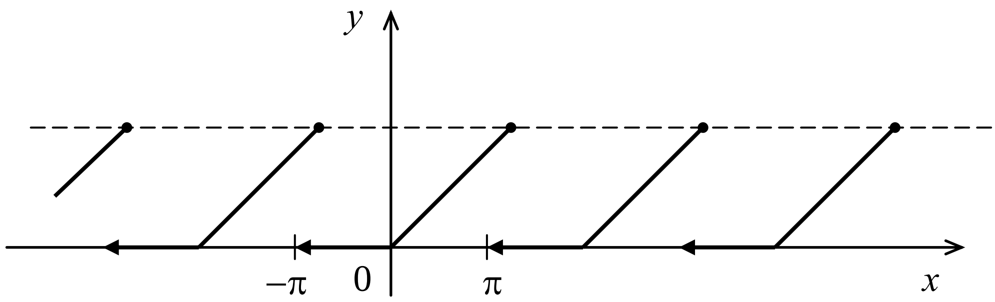
$$\cos n(x + 2\pi k) = \cos(nx + 2\pi kn) = \cos nx,$$

$$\sin n(x + 2\pi k) = \sin(nx + 2\pi kn) = \sin nx.$$

Аналогично, если функция $f(x)$ имеет период $T = 2\ell$, $f(x + 2\ell k) = f(x)$, то разложение ее в ряд Фурье имеет место для всей прямой.

Так как для периодической функции периода T интегралы по любым отрезкам длины T равны между собой, $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_b^{b+T} f(x)dx$, то для вычисления коэффициентов Фурье периодической функции можно интегрировать по любому отрезку длиной T. Так, если функция имеет период 2π (2ℓ), то в формулах (5.11), (5.12) (в формулах (5.14), (5.15) вместо $[-\pi; \pi]$ $([-\ell; \ell])$ можно взять интегралы по отрезку $[0; 2\pi]$ $([0; 2\ell])$.

Пример 3. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$, определенную следующим образом: $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0;\\ x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$ и $f(x+2\pi)=f(x)$ (рис. 5.4).



Р и с. 5.4

Данная функция кусочно-дифференцируема, следовательно, разложима в ряд Фурье, имеющий вид:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cdot\cos nx+b_n\cdot\sin nx).$$

При этом $a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}x\,dx=\frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$,

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}0\cdot\cos nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int\limits_0^{\pi}\sin nx\,dx\right)=\frac{\cos nx}{n^2\pi}\Big|_0^{\pi}=\frac{\cos n\pi-1}{n^2\pi}=\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}.$$

Отсюда $a_n=0$ при n четном и $a_n=-\frac{2}{n^2\pi}$ при n нечетном.

Аналогичными вычислениями находим $b_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $n=1, 2, \ldots$

Следовательно,

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\left(-\frac{2}{\pi}\cos x+\sin x\right)-\frac{\sin 2x}{2}+\left(-\frac{2}{9\pi}\cos 3x+\frac{\sin 3x}{3}\right)-\frac{\sin 4x}{4}+\ldots$$

или
$$f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\left(\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right)+$$
$$+\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\ldots\right).$$

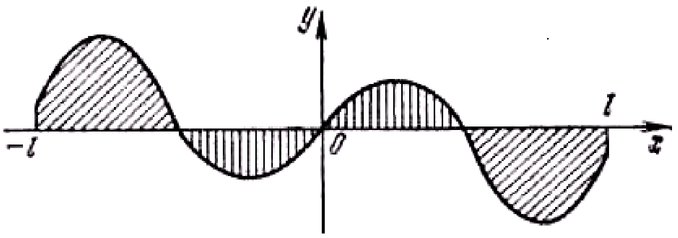
В точках $(2k+1)\pi$ данная функция терпит разрыв, следовательно, в этих точках ряд принимает значение, отличное от значения функции. Так, при $x=\pi$ функция $f(x)=\pi$, в то время как сумма ряда равна $\frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}=\frac{\pi}{2}$. Таким образом, при $x=\pi$ получаем $\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\left(-1-\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}-\ldots\right)$. Отсюда $\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

То, что ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ сходится, можно определить при помощи признаков сходимости числовых рядов (например, интегрального). Здесь же в качестве побочного результата мы получили сумму этого ряда.

5.7 Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций

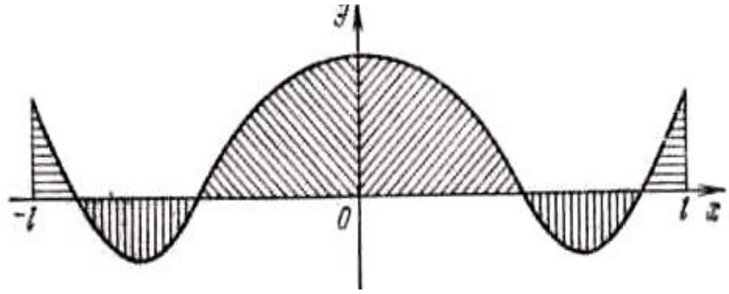
Сделаем два замечания, необходимые для дальнейших рассуждений:

1) рассмотрим нечетную на отрезке $[-\ell;\ \ell]$ функцию $g(x)$, т.е. такую, что $g(-x)=-g(x)$, $x\in[-\ell;\ \ell]$. Из геометрических соображений ясно, что $\int_{-\ell}^{\ell} g(x)dx=0$ (рис. 5.5).



Р и с. 5.5

2) если функция $g(x)$, $x \in [-\ell; \ell]$, четная, т.е. $g(-x) = g(x)$, то, очевидно, $\int\limits_{-\ell}^{\ell} g(x)dx = 2\int\limits_{0}^{\ell} g(x)dx$ (рис. 5.6).



Р и с. 5.6

Рассмотрим разложение в ряд Фурье нечетных функций.

Пусть $f(x)$ – нечетная на отрезке $[-\pi; \pi]$ функция и, допустим, что для $f(x)$ имеет место разложение (5.7). Так как в этом случае $f(x)\cdot\cos nx$ – нечетная функция, $f(-x)\cdot\cos n(-x) = -f(x)\cos nx$, а произведение $f(x)\cdot\sin nx$ является четной функцией: $f(-x)\sin n(-x) = -f(x)(-\sin nx) = f(x)\sin nx$, то для коэффициентов ряда Фурье получим:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0,\ \ n = 1, 2, 3, \ldots;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,\ \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Отсюда следует, что разложение нечетной функции $f(x)$ в ряд Фурье имеет вид

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_n \sin nx + \ldots \qquad (5.16)$$

Аналогично для четных функций $f(x)$ получаем разложение

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_n \cos nx + \ldots (5.17)$$

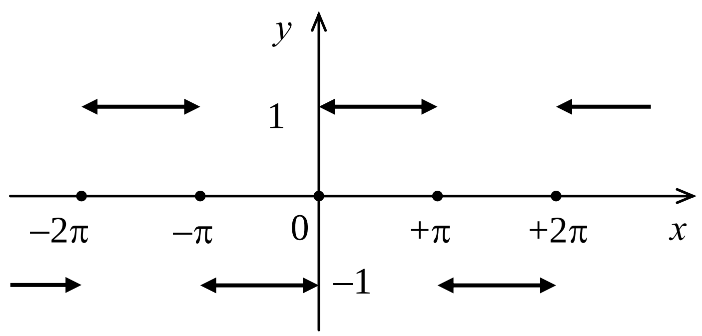
Таким образом, если функция $f(x)$ нечетная, то ее ряд Фурье содержит только члены с синусами; если $f(x)$ четная, то ее ряд Фурье содержит свободный член и только члены с косинусами.

Подобные разложения можно получить для четных и нечетных функций, определенных на отрезке $[-\ell; \ell]$.

Пример 4. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $y = f(x)$ с периодом 2π, которая определена следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases} -1 \quad \text{при} \quad -\pi < x < 0; \\ 0 \quad \text{при} \quad x = 0 + \pi k, \quad k \in Z; \\ 1 \quad \text{при} \quad 0 < x < \pi, \end{cases}$$

задающую прямоугольный переменный импульс (рис. 5.7).



Р и с. 5.7

Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теорем Дирихле и, значит, разлагается в ряд Фурье. Вычислим ее коэффициенты Фурье. Так как $f(x)$ нечетна, то $a_n = 0$ для всех n. Далее,

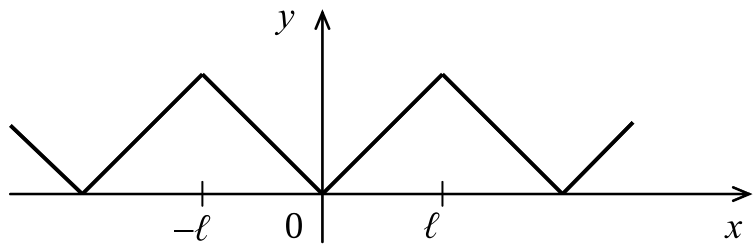
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\cdot\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\cos nx}{n}\bigg|_0^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n}(1-\cos n\pi) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad n \quad \text{четном;} \\ \dfrac{4}{\pi n} \quad \text{при} \quad n \quad \text{нечетном.} \end{cases}$$

Следовательно, $$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} + \ldots\right),$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$

Пример 5. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $y = f(x)$ с периодом 2ℓ, заданную на отрезке $[-\ell; \ell]$ формулой $f(x) = |x|$, задающую симметрический треугольный импульс (рис. 5.8).



Р и с. 5.8

Так как рассматриваемая функция четная, то $b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$

Далее, $$a_0 = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} x\,dx = \ell,$$

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} x\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad n \quad \text{четном;} \\ -\dfrac{4\ell}{\pi^2 n^2} \quad \text{при} \quad n \quad \text{нечетном.} \end{cases}$$

Следовательно, на отрезке $[-\ell; \ell]$

$$|x| = \frac{\ell}{2} - \frac{4\ell}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi}{\ell}x + \frac{\cos\frac{3\pi}{\ell}x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos\frac{(2k+1)\pi}{\ell}}{(2k+1)^2} + \ldots\right).$$

5.8 Разложение в ряд Фурье функций, заданных на произвольном отрезке [a; b]

Пусть дана кусочно-дифференцируемая функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a;\ b]$. Перенеся начало координат в середину отрезка $[a;\ b]$, мы получим новую систему координат, относительно которой область определения функции $f(x)$ имеет вид $[-\ell;\ \ell]$, где $\ell = \frac{b-a}{2}$. Следовательно, для функции $f(x)$ можно получить разложение в ряд Фурье вида (5.13).

Если перенести начало координат в точку $x = a$, то область определения функции $f(x)$ будет иметь вид $[0;\ \ell]$, где $\ell = b - a$. Продолжим "нечетным образом" функцию $f(x)$ на отрезок $[-\ell;0]$, т.е. определим функцию $f(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0,\ell]; \\ 0, & x = 0; \\ -f(-x), & x \in [-\ell;0]. \end{cases}$

Функция $f(x)$ является нечетной, следовательно, она разлагается в ряд Фурье только по синусам.

Продолжая "четным образом" функцию $f(x)$ на отрезок $[-\ell;\ 0]$, т.е. введя в рассмотрение функцию $f(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0;\ell] \\ f(-x), & x \in [-\ell;0] \end{cases}$, которая является четной, аналогично получим разложение данной функции в ряд Фурье, только по косинусам.

Таким образом, любая функция $f(x)$, определенная на произвольном отрезке $[a;\ b]$ и удовлетворяющая на этом отрезке условиям теорем Дирихле, может быть разложена в ряд Фурье по синусам и косинусам, а также только по синусам, или только по косинусам.

Пример 6. Разложить функцию $f(x) = x$ на отрезке $[0;\ \pi]$ в ряд по синусам.

Продолжая эту функцию нечетным образом на $[-\pi;\ 0]$, будем иметь $f(x)=x$; тогда $a_n = 0$, $n = 0,1,2,\ \ldots$ и $b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi x \sin nx\, dx = (-1)^{n+1}\frac{2}{\pi}$.

Следовательно, во всех точках промежутка $[0;\ \pi]$ имеет место разложение

$$x = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{\sin 2nx}{n} + \ldots\right).$$

В точке $x = \pi$ равенство нарушается: значение функции равно π, а сумма ряда – 0.

Пример 7. Разложить функцию $f(x) = x$ на отрезке $[0;\ \pi]$ в ряд по косинусам.

Продолжая эту функцию четным образом на $[-\pi;\ 0]$, получим $f(x) = |x|$.

Имеем: $b_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $a_0 = \pi$, $a_n = \begin{cases} 0 & \text{при } n \text{ четном;} \\ -\dfrac{4}{\pi n^2} & \text{при } n \text{ нечетном.} \end{cases}$

Следовательно, на отрезке $[0;\ \pi]$

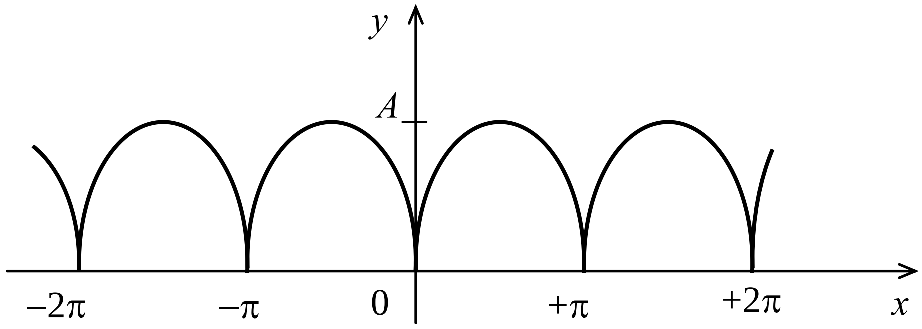
$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} + \ldots\right).$$

5.9 Разложение в ряд Фурье некоторых функций, встречающихся в электротехнике

В электротехнике и радиотехнике нередко встречаются периодические функции, непрерывные или имеющие точки разрыва первого рода внутри отрезка $[-\pi;\ \pi]$ или на его границах. Рассмотрим некоторые примеры разложения в ряд Фурье таких функций.

Пример 8. Разложить в ряд Фурье кривую двухполупериодного выпрямленного синусоидального тока (рис. 5.9):

$$i(t) = \begin{cases} A\sin \omega t, & \text{если} \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{\omega}; \\ -A\sin \omega t, & \text{если} \quad \dfrac{\pi}{\omega} \le t \le \dfrac{2\pi}{\omega}. \end{cases}$$



Р и с. 5.9

Данная функция может быть представлена в виде $i(t) = |A \sin \omega t|$, $-\pi \le \omega t \le \pi$.

Полагаем $\omega t = x$ и распространяем функцию периодически на всю прямую. Тогда $y = i(t) = i\left(\frac{x}{\omega}\right) = I(t) = |A\sin x|$. Так как полученная функция $f(x)$ четная, то $b_k = 0$. Вычислим коэффициенты a_k.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |A\sin x| dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} A\sin x\, dx = \frac{2A}{\pi}\left(-\cos x\right)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2A}{\pi}\left(-\cos\pi - \left(-\cos 0\right)\right) = \frac{4A}{\pi},$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} A\sin x \cos kx dx = \frac{A}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin\left(k+1\right)x - \sin\left(k-1\right)x\right)dx =$$

$$= \frac{A}{\pi}\left(-\frac{1}{k+1}\cos(k+1)x + \frac{1}{k-1}\cos(k-1)x\right)\Bigg|_0^{\pi}.$$

При k нечетном $a_k = 0$, при k четном $a_k = -\dfrac{4A}{\pi\left(k^2-1\right)}$.

Функция $I(x)$ разлагается в ряд Фурье вида

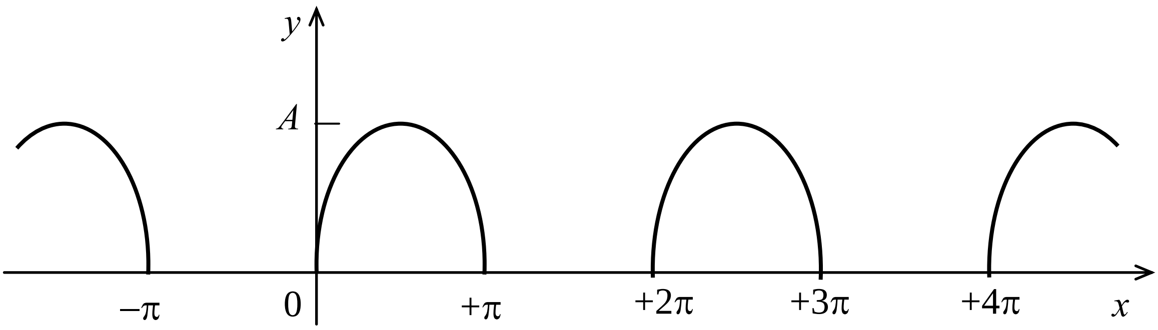
$$I(x) = \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{3\pi}\cos 2x - \frac{4A}{15\pi}\cos 4x - \frac{4A}{35\pi}\cos 6x - \ldots,$$

а исходная функция, следовательно, в ряд Фурье вида

$$i(t) = \frac{2A}{\pi}\left(1 - \frac{2}{3}\cos 2\omega t - \frac{2}{15}\cos 4\omega t - \frac{2}{35}\cos 6\omega t - \ldots\right).$$

Пример 9. Разложить в ряд Фурье кривую однополупериодного выпрямленного синусоидального тока (рис. 5.10):

$$i(t)=\begin{cases} A\sin\omega t, & \text{если} \quad 0\le t\le \dfrac{\pi}{\omega};\\ 0, & \text{если} \quad \dfrac{\pi}{\omega}\le t\le \dfrac{2\pi}{\omega}.\end{cases}$$



Р и с. 5.10

Положим, $\omega t = x$. Тогда

$$y=i(t)=i\left(\frac{x}{\omega}\right)=I(x)=\begin{cases} A\sin x, & 2\pi k\le x\le (2k+1)\pi;\\ 0, & (2k+1)\pi\le x\le 2\pi(k+1).\end{cases}$$

Имеем $a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} I(x)dx=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} A\sin x\,dx=\dfrac{A}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^{\pi}=\dfrac{2A}{\pi}$,

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} I(x)\cos kx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} A\sin x\cos kx\,dx.$$

Используя результаты примера 8, получим при k нечетном $a_k=0$, при k четном $a_k=-\dfrac{2A}{\pi(k^2-1)}$.

Далее, $b_k=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} I(x)\sin kx\,dx=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} A\sin x\sin kx\,dx$. Если $k=1$, то

$$b_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} A\sin^2 x\,dx=\frac{A}{2\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)dx=\frac{A}{2\pi}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{A}{2\pi}\left(\left(\pi-\frac{0}{2}\right)-\left(0-\frac{0}{2}\right)\right)=\frac{A}{2},\ \text{ если } k\ne 1, \text{ то } b_k=0.$$

Функция $I(x)$ разлагается в ряд Фурье: $I(x) = \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2}\sin x -$

$$-\frac{2A}{3\pi}\cos 2x - \frac{2A}{15\pi}\cos 4x - \frac{2A}{35\pi}\cos 6x - \ldots - \frac{2A}{\left(4m^2-1\right)\pi}\cos 2mx - \ldots$$

Следовательно,

$$i(t) = I(\omega t) = \frac{A}{\pi}\left(1 + \frac{\pi}{2}\sin \omega t - \frac{2}{3}\cos 2\omega t - \ldots - \frac{2}{4m^2-1}\cos 2m\omega t - \ldots\right).$$

Задания для самостоятельного решения

1. Показать, что многочлены Лежандра $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)$, $P_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right)$, $P_4(x) = \frac{1}{2}\left(35x^4-30x^2+3\right)$ ортогональные на отрезке $[-1;\, 1]$.

2. Выяснить, ортогональны ли на отрезке $[-1;\, 1]$ следующие функции:

а) $\varphi_1(x) = x + 1$, $\varphi_2(x) = x^2$;

б) $\varphi_1(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\varphi_2(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

3. Разложить в ряд Фурье следующие функции:

а) $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{4}, & \text{при} \quad -\pi \le x \le 0; \\ \dfrac{\pi}{4}, & \text{при} \quad 0 < x < \pi; \end{cases}$

б) $f(x) = 4 - x$ только по синусам в промежутке $(0;\, 4]$;

в) $f(x) = 4 - x$ только по косинусам на отрезке $[0;4]$.

4. Разложить функцию $y = x^2$ в ряд Фурье:

а) в интервале $(-\pi;\, \pi)$;

б) в интервале $(0;\, 2\pi)$.

При помощи полученных разложений вычислить суммы следующих числовых рядов:

$$S_1 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots;$$

$$S_2 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} + \ldots;$$

$$S_3 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \ldots$$

5.10 Индивидуальное задание по теме "Ряды Фурье"

Разложить в тригонометрический ряд Фурье по косинусам ломаную, проходящую через три данные точки на отрезке $[-\pi; \pi]$.

Порядок выполнения:

1) построить график ломаной на $[-\pi; \pi]$;

2) составить уравнение ее звеньев в виде $y = A_1x+B_1$, $y = A_2x+B_2$;

3) определить коэффициенты Фурье;

4) вычислить числовые значения коэффициентов a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 с точностью 0,01;

5) выполнить контроль на ЭВМ. Построить частичные суммы ряда S_0, S_1, S_2, S_3.

№ вар.	A		B		C		№ вар.	A		B		C	
	x	y	x	y	x	y		x	y	x	y	x	y
1	0	1	π/2	2	π	1	17	0	2	π/3	3	π	2
2	0	2	π/3	3	π	2	18	0	3	π/2	4	π	3
3	0	3	π/4	4	π	3	19	0	4	π/6	2	π	4
4	0	4	π/2	1	π	4	20	0	1	π/4	1	π	4
5	0	1	π/3	2	π	4	21	0	2	π/2	2	π	3
6	0	2	π/4	3	π	3	22	0	3	π/3	3	π	2
7	0	3	π/2	4	π	2	23	0	4	π/4	4	π	1
8	0	4	π/3	1	π	1	24	0	4	π/6	2	π	2
9	0	1	π/4	2	π	1	25	0	3	2/3π	3	π	3
10	0	2	π/6	3	π	2	26	0	2	π/2	4	π	4
11	0	3	π/2	4	π	3	27	0	1	π/3	5	π	4
12	0	4	π/3	1	π	4	28	0	2	π/4	1	π	3
13	0	1	π/4	2	π	1	29	0	3	2π/3	2	π	2
14	0	2	π/6	3	π	2	30	0	4	π/2	3	π	1
15	0	3	2π/3	4	π	3	31	0	2	π/3	4	π	2
16	0	4	π/2	1	π	4	32	0	1	π/4	2	π	1

Примечание. Номер варианта студента соответствует порядковому номеру его фамилии в журнале успеваемости преподавателя.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д.* Математика для техникумов на базе средней школы: Учеб.пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Гл.ред.физ.-мат.лит., 1990 – 576с.:ил..

2. *Данко П.Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 т. / *П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Л. Кожевникова*. 6-е изд. –М.: ООО "Издательство Оникс", ООО "Издательство "Мир" и "Образование", 2006.

3. *Запорожец Г.И.* Руководство к решению задач по математическому анализу: учеб. пособ. для вузов / *Г.И. Запорожец*. –6-е изд., стер. –СПб.: Лань, 2010. – 464 с.: ил.

4. *Кузнецов Л.А.* Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты: учеб. пособ. для вузов / *Л.А. Кузнецов*. –10-е изд., стер. –СПб.: Лань, 2008. – 240 с.

5. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления: учебник для втузов, в 2 т. –изд. стер. / *Н.С. Пискунов.*–М.: Интеграл-Пресс, 2006.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебно-методическое пособие

ЕГОРОВА Ирина Петровна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. РЯДЫ

Редакторы:

Е.С. Захарова
И.А. Назарова

Подписано в печать 27.12.17
Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная
Усл. п. л. 5,8. Уч.-изд. л. 3,4
Тираж 50 экз. Рег. № 12/17sf

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
"Самарский государственный технический университет"
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Главный корпус

Отпечатано в типографии
Самарского государственного технического университета
Филиал в г. Сызрани, 446001, г. Сызрань, ул. Советская 45