



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

---

Кафедра «Электротехника, информатика и компьютерные технологии»

В.И. БУДИН

# **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ АВТОМАТИКИ И УПРАВЛЕНИЯ**

*Учебное пособие*

Самара  
Самарский государственный технический университет  
2016

Печатается по решению редакционно-издательского совета СамГТУ

УДК 62-52 (075.8)

ББК 32.965

**Будин В. И.**

**Математические основы автоматике и управления:** учеб. пособие / *В. И. Будин.* – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2016. – 119 с.: ил. 43, табл. 2. Библиогр.: 10 назв.

ISBN 978-5-7964-1924-3

Излагаются основы операционного исчисления, спектрального анализа, матричного исчисления и линейной алгебры с ориентацией на решение задач теории автоматического управления. Материал сопровождается значительным количеством примеров. Приводятся контрольные вопросы и упражнения для самостоятельного решения.

Для студентов технических вузов всех форм обучения, изучающих дисциплину «Математические основы автоматике и управления» по программам направлений бакалавриата «Автоматизация технологических процессов и производств» и «Электроэнергетика и электротехника». Может быть также полезно студентам других направлений, учебные программы которых содержат вопросы теории автоматического управления.

УДК 62-52 (075.8)

ББК 32.965

Рецензенты: зав. кафедрой «Информатика и системы управления»  
Волжского университета им. В.Н. Татищева  
доктор техн. наук, профессор *С.В. Краснов*

зав. кафедрой электромеханики Ивановского  
государственного энергетического университета  
доктор техн. наук, профессор *Ю.Б. Казаков*

ISBN 978-5-7964-1924-3

© В. И. Будин, 2016

© Самарский государственный  
технический университет, 2016

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое учебное пособие написано в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования к уровню подготовки бакалавров по направлениям «Автоматизация технологических процессов и производств» и «Электроэнергетика и электротехника» и предназначено для студентов, изучающих в рамках учебных планов этих направлений дисциплину «Математические основы автоматики и управления».

Целью данного издания является освоение математического аппарата, необходимого в дальнейшем для успешного изучения дисциплины «Теория автоматического управления».

Курс математики, изучаемый в технических университетах не в полной мере удовлетворяет требованиям математической подготовки бакалавров, необходимой для успешного изучения теории автоматического управления. Поэтому возникла необходимость включения в указанные учебные планы подготовки бакалавров дисциплины «Математические основы автоматики и управления». Учебники и учебные пособия по данной дисциплине практически отсутствуют. Имеется лишь одно близкое по сути фундаментальное трехтомное учебное пособие, изданное МГТУ им. Н.Э. Баумана «Математические основы теории автоматического управления» [4-6]. Однако из-за незначительного тиража обеспечить им студентов технических университетов не представляется возможным.

В основе предлагаемого учебного пособия лежит одноименный курс лекций, читаемый автором в течение ряда лет студентам выше указанных направлений. Материал излагается в сжатой форме, но достаточно полно по содержанию объеме с ориентацией на решение основных задач теории автоматического управления и использованием большого количества примеров.

Пособие состоит из четырех разделов, в которых рассматриваются основные вопросы операционного исчисления, спектрального анализа, матричного исчисления и математических методов современной теории управления. Выбор этих разделов обусловлен их важностью в теории и практике систем автоматического управления, а также значительной трудностью самостоятельного освоения данного материала по специальной литературе в области теории автоматического управления. В заключительной части каждого раздела приводятся упражнения и контрольные вопросы, которые позволяют оценить степень усвоения пройденного материала.

Первый раздел посвящен вопросам, связанным с операционным исчислением, в основе которого лежит преобразование Лапласа. При этом сначала излагается методика получения изображений непрерывных элементарных функций, свойства преобразования Лапласа и их применение для вычисления изображений более сложных функций времени. Затем рассматривается обратное преобразование Лапласа и его использование для получения оригиналов функций по их изображениям. При этом предлагаются два подхода для решения поставленной задачи: прямой метод с непосредственным использованием выражения обратного преобразования Лапласа на основе вычетов и метод разложения изображения на элементарные составляющие с последующим применением таблицы преобразования Лапласа.

Освещаются также вопросы использования операторного метода для решения дифференциальных уравнений и получения на их основе передаточных функций динамических объектов и систем, а также применение передаточных функций для определения математических моделей типовых соединений отдельных динамических звеньев и систем автоматического регулирования в целом. В заключение приводится материал по применению операционного исчисления для расчета переходных процессов в автоматических системах.

Во втором разделе представлен материал по преобразованию и рядам Фурье. В первой части этого раздела рассматривается преобразование Фурье. Показано, что данное преобразование является частным случаем преобразования Лапласа. Поэтому свойства преобразования Фурье подробно не излагаются. Основное внимание уделяется вопросам применения преобразования Фурье для получения частотных характеристик динамических систем. Вторая часть раздела посвящена рядам Фурье и их применению для разложения периодических функций времени в тригонометрический ряд. В рамках этого вопроса рассматривается задача определения коэффициентов Фурье и построения частотных спектров периодических функций. Показывается также возможность разложения в ряд Фурье непериодических функций, заданных на конечном интервале времени, с помощью преобразования данных функций в периодические путем их соответствующей трансформации вне заданного интервала времени.

Третий раздел посвящен элементам матричного исчисления и линейной алгебры. В краткой форме рассмотрены простейшие матричные операции и определители, более подробно – операция обращения матрицы. Значительное место занимает материал по векторам и векторному пространству, включая

основные операции и преобразования в линейном пространстве. Приведена методика ортогонализации векторного пространства с помощью алгоритма Грамма-Шмидта, а также процедура преобразования подобия. Рассмотрены также вопросы определения собственных значений матрицы, получения характеристического полинома и диагонализации матриц преобразования.

В четвертом разделе представлен материал по математическим основам современной теории управления, в основе которой лежит метод пространства состояний. Показывается, как получить стандартную форму уравнений состояния на основе расчетных моделей (схем моделирования). Значительное место уделено типовым структурам расчетных моделей и их применению для определения матриц уравнений состояния в канонических формах.

Подробно излагаются вопросы эквивалентного преобразования математических моделей динамических систем в пространстве состояний, в том числе свойства подобных систем. Рассматриваются вопросы по переходу от произвольной формы уравнений состояния к каноническим формам уравнений состояния с использованием матриц управляемости и наблюдаемости. Особое внимание уделяется получению диагональной канонической формы с помощью матриц Вандермонда. Кроме того рассматриваются вопросы решения системы уравнений состояния операторным методом и в функции времени, а также подробно излагаются методы вычисления матриц перехода.

В пособии умышленно опущены вопросы использования для решения рассматриваемых задач математических пакетов, в частности, наиболее применяемой в теории автоматического управления среды MatLab, так как это потребует значительных по объему пояснений по их использованию и в итоге нарушит структуру и методику изложения материала.

Автор выражает признательность профессорам С.В. Краснову и Ю.Б. Казакову за полезные замечания и рекомендации, способствующие улучшению рукописи. Автор допускает также, что учебное пособие не лишено недостатков и с благодарностью примет любые советы и критические замечания.

# Глава 1. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ АНАЛИЗЕ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

В основе операционного исчисления лежит преобразование Лапласа. Оно позволяет значительно упростить решение дифференциальных уравнений и тем самым облегчить исследование систем автоматического управления (САУ). Операторные методы анализа и синтеза САУ являются основой классической теории автоматического управления (ТАУ).

## 1.1. Преобразование Лапласа

### 1.1.1 Прямое преобразование Лапласа

Преобразование Лапласа сводится к функциональному преобразованию непрерывной функции  $f(t)$  с применением интеграла

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (1.1)$$

где  $s = c + j\omega$  - комплексная переменная;

$F(s)$  - изображение оригинала функции  $f(t)$ ;

$\mathcal{L}$  - символ преобразования Лапласа;

$t$  - независимая переменная (время).

Функция  $f(t)$  должна удовлетворять следующим условиям:

- 1) быть непрерывной для  $t > 0$ , при этом допустимы точки разрыва первого рода;
- 2)  $f(t) = 0$  при  $t < 0$ ;
- 3) иметь ограниченный порядок возрастания.

Используя преобразование (1.1), можно получить изображения элементарных функций. Например, изображение единичной функции  $f(t) = 1(t)$  равно

$$F(s) = \mathcal{L}\{1(t)\} = \int_0^{\infty} 1(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}.$$

*Пример 1.1.* Пусть  $f(t) = e^{-\alpha t} \cdot 1(t)$ ,  $\alpha > 0$ . Тогда

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t} 1(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+\alpha)t} dt = \frac{-1}{s+\alpha} e^{-(s+\alpha)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+\alpha}.$$

Для наиболее используемых элементарных функций  $f(t)$  преобразование Лапласа было получено и оформлено в виде таблицы оригинал  $f(t)$  – изображение  $F(s)$ . Ниже приведена часть этой таблицы (табл. 1.1).

Таблица 1.1

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$1(t)$	$\frac{1}{s}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$
$t^2$	$\frac{1}{s^3}$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s + \alpha}$
$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(s + \alpha)^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$
$e^{-\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$
$\delta(t - \tau)$	$e^{-\tau s}$
$1(t - \tau)$	$\frac{e^{-\tau s}}{s}$
$t - \tau$	$\frac{e^{-\tau s}}{s^2}$
$e^{-\alpha(t-\tau)}$	$\frac{e^{-\tau s}}{s + \alpha}$

### 1.1.2. Свойства преобразования Лапласа

а) *Линейность преобразования*

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(t)\right\} = \sum_{i=1}^n \lambda_i F_i(s). \quad (1.2)$$

*Пример 1.2.* Используя свойство (1.2) найти изображение функции

$$f(t) = \sin \omega t.$$

Решение связано с представлением синуса в комплексной форме, которая является алгебраической суммой двух экспонент (формула Эйлера):

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} \sin \omega t e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2i} e^{-st} dt = \\ &= \frac{1}{2j} \left[ \int_0^{\infty} e^{-(s-j\omega)t} dt - \int_0^{\infty} e^{-(s+j\omega)t} dt \right] = \\ &= \frac{1}{2j} \left[ -\frac{1}{s-j\omega} e^{-(s-j\omega)t} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{s+j\omega} e^{-(s+j\omega)t} \Big|_0^{\infty} \right] = \\ &= \frac{1}{2j} \left[ \frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

б) *Дифференцирование оригинала*

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f^{(1)}(0) - \dots - s^0 f^{(n-1)}(0), \quad (1.3)$$

где  $f^{(i)}(0)$ ,  $i=1,2,\dots,n$  - начальные условия.

В частном случае:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f^{(1)}(t)\} &= sF(s) - f(0), \\ \mathcal{L}\{f^{(2)}(t)\} &= s^2 F(s) - sf(0) - f^{(1)}(0), \\ \mathcal{L}\{f^{(3)}(t)\} &= s^3 F(s) - s^2 f(0) - sf^{(1)}(0) - f^{(2)}(0). \end{aligned}$$

Из (1.3) следует, что по существу операция дифференцирования оригинала соответствует операции умножения изображения этого оригинала на комплексную переменную  $s$ .

Используя первые два свойства преобразования Лапласа, можно получить операторную форму дифференциального уравнения.



*Пример 1.3.* Имеется дифференциальное уравнение второго порядка

$$y^{(2)}(t) + 5y^{(1)}(t) + 6y(t) = 0, \quad \text{при } y(0) = 1, \quad y^{(1)}(0) = 2.$$

Применив к уравнению свойства (1.2) и (1.3), получим

$$s^2Y(s) - sy(0) - y^{(1)}(0) + 5sY(s) - 5y(0) + 6Y(s) = 0,$$

или после соответствующих преобразований имеем

$$s^2Y(s) + 5sY(s) + 6Y(s) = s + 7.$$

*Пример 1.4.* Найти изображение по Лапласу дельта-функции  $\delta(t)$ .

Известно, что  $\delta(t) = 1^{(1)}(t)$ . Отсюда используя свойство (1.3) получим

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = s\mathcal{L}\{1(t)\} = \frac{s}{s} = 1.$$

в) *Теорема о смещении*

$$\mathcal{L}\{f(t - \tau)\} = e^{-\tau s}F(s), \quad (1.4)$$

где  $f(t - \tau)$  – смещенная функция (рис. 1.1);  $\tau$  – время запаздывания.

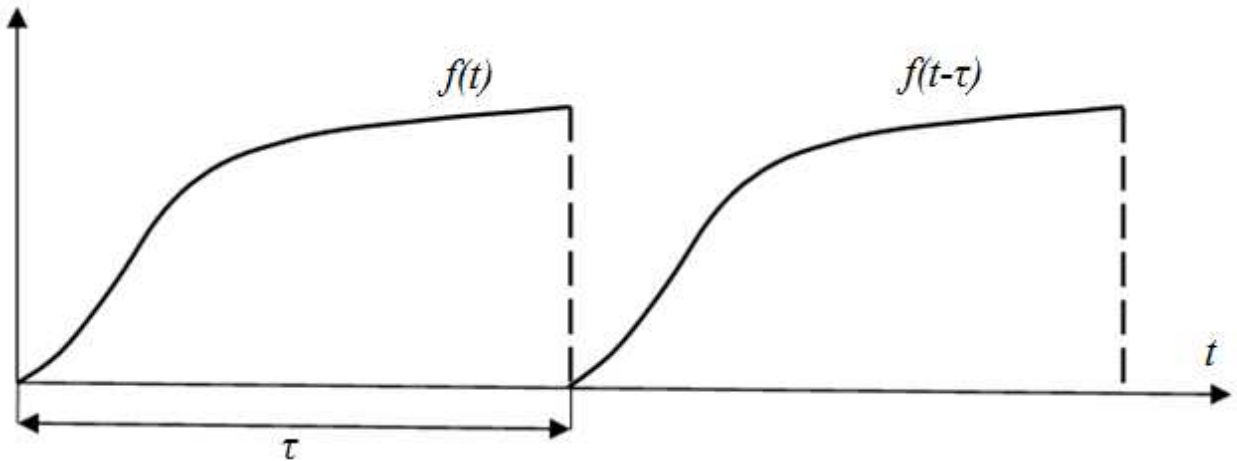


Рис. 1.1

Положим  $h=t - \tau$ , тогда

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(h)e^{-sh}dh = e^{s\tau} \int_0^{\infty} f(t - \tau)e^{-st}dt.$$

Отсюда

$$\mathcal{L}\{f(t - \tau)\} = \int_0^{\infty} f(t - \tau)e^{-st}dt = e^{-s\tau}F(s).$$

Таким образом, преобразование Лапласа смещённой функции равно изображению несмещённой функции умноженной на  $e^{-s\tau}$ , где  $\tau$  - время смещения.

*Пример 1.5.* Определить изображение функции  $f(t - \tau) = (t - \tau)^n$ .

Из таблицы преобразования Лапласа имеем

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Поэтому в нашем случае

$$F(s) = \mathcal{L}\{(t - \tau)^n\} = e^{-s\tau} \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

*Пример 1.6.* Для функции  $f(t - \tau) = \cos \beta(t - \tau)$  необходимо получить изображение по Лапласу.

Операторное изображение функции  $\cos \beta t$  равно (табл. 1.1)

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + \beta^2}.$$

Отсюда

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + \beta^2} e^{-s\tau}.$$

г) Умножение оригинала  $f(t)$  на экспоненциальную функцию  $e^{at}$

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s - a). \quad (1.5)$$

*Пример 1.7.* Пусть  $f(t) = e^{-\alpha t} t^n$ . Требуется определить для этой функции изображение Лапласа.

Известно (табл. 1.1), что  $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$ , поэтому на основе свойства (1.5) имеем

$$F(s) = \mathcal{L}\{e^{-\alpha t} t^n\} = \frac{n!}{(s + \alpha)^{n+1}}.$$

д) Теорема о масштабировании

Пусть  $f(t)$  оригинал,  $F(s)$  - его изображение,  $\alpha$  - действительное положительное число. Тогда справедливо равенство

$$\mathcal{L}\left\{f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right\} = \alpha F(\alpha s). \quad (1.6)$$

Докажем справедливость (1.6) на примере функции  $f(t) = \sin\omega \frac{t}{\alpha}$ .

Сделаем подстановку  $\beta = \omega/\alpha$ , тогда получим:

$$\mathcal{L}\left\{\sin\omega \frac{t}{\alpha}\right\} = \mathcal{L}\{\sin\beta t\} = \frac{\beta}{s^2 + \beta^2} = \alpha \frac{\omega}{\alpha^2 s^2 + \omega^2}.$$

*Пример 1.8.* Определить изображение функции  $f(t, a) = \cos\omega \frac{t}{a}$ .

По табл. 1.1 находим изображение  $\cos\omega t$  по Лапласу:

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

Отсюда

$$\mathcal{L}\left\{\cos\omega \frac{t}{a}\right\} = a \frac{as}{(as)^2 + \omega^2} = \frac{a^2\omega}{a^2s^2 + \omega^2}.$$

*е) Теорема о свёртке*

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right\} = F_1(s)F_2(s). \quad (1.7)$$

Это выражение обычно используется при решении матричных дифференциальных уравнений первого порядка с помощью операторного метода.

*з) Изображение произведения двух функций времени*

$$\mathcal{L}\{f_1(t)f_2(t)\} = \sum_{i=1}^m \text{Res } F_1(s-\lambda)F_2(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_i}, \quad (1.8)$$

где  $m$  - число особых точек (полюсов) функции  $F_2(\lambda)$ ;

$\text{Res}$  - операция, которая называется вычетом.

Имеется второе соотношение

$$\mathcal{L}\{f_1(t)f_2(t)\} = - \sum_{i=1}^l \text{Res } F_1(s-\lambda)F_2(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_i}, \quad (1.9)$$

где  $l$  - число особых точек функции  $F_1(s-\lambda)$ .

При выборе выражений (1.7) и (1.8) следует исходить из возможности использования некрратных полюсов.

*Пример 1.9.* Для функции  $f(t) = te^{-\alpha t}$  необходимо получить изображение  $F(s)$ .

Положим  $f_1(t) = t$ ,  $f_2(t) = e^{-\alpha t}$ . Известно (табл. 1.1), что

$$F_1(s) = \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}, \quad F_2(s) = \mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\} = \frac{1}{s+\alpha},$$

тогда в соответствии с (1.8) имеем:

$$F(s) = \mathcal{L}\{te^{-\alpha t}\} = \frac{(\lambda+\alpha)}{(s-\lambda)^2} \cdot \frac{1}{\lambda+\alpha} \Big|_{\lambda=-\alpha} = \frac{1}{(s+\alpha)^2}.$$

При использовании соотношения (1.9) решение задачи усложняется из-за наличия двух кратных полюсов  $\lambda_{1,2} = s$ :

$$F(s) = -\frac{d}{d\lambda} \left[ \frac{(s-\lambda)^2}{(s-\lambda)^2(\lambda+\alpha)} \right] \Big|_{\lambda=s} = \frac{1}{(\lambda+\alpha)^2} \Big|_{\lambda=s} = \frac{1}{(s+\alpha)^2}.$$

В итоге получается тот же результат, но более трудоёмким путём, который связан с необходимостью определения производной.

*ж) Теорема о начальном значении*

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t), \quad (1.10)$$

т.е. чтобы получить начальное значение оригинала  $f(0)$ , необходимо в выражение  $sF(s)$  подставить  $s = \infty$ .

*Пример 1.10.* Найти начальное значение оригинала, если известно изображение

$$F(s) = \frac{1}{(s+a)^2}.$$

В этом случае

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \frac{s}{(s+a)^2} \Big|_{s=\infty} = 0.$$

*и) Теорема о конечном значении*

Если известно изображение функции  $f(t)$ , то её установившееся значение можно получить по соотношению

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t). \quad (1.11)$$

*Пример 1.11.* Дано изображение функции  $F(s) = \frac{1}{(s+\alpha)^2}$ .

Предельное значение оригинала  $f(t)$  равно:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = s \frac{1}{(s+\alpha)^2} \Big|_{s=0} = 0.$$

### 1.1.3. Обратное преобразование Лапласа

Обратное преобразование Лапласа позволяет получить оригинал функции  $f(t)$  по его изображению  $F(s)$ :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st} ds. \quad (1.12)$$

Использование этого выражения весьма затруднительно, особенно, для сложных выражений  $F(s)$ . Поэтому были разработаны более приемлемые способы определения оригинала  $f(t)$ , в основе которых лежат вычеты. В теории автоматического управления применяют обычно два способа решения поставленной задачи: прямой метод и метод разложения на элементарные составляющие.

*Прямой метод* связан с использованием выражения

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \sum_{i=1}^n \operatorname{Res} F(s)e^{st} \Big|_{s=s_i}, \quad (1.13)$$

где  $s = s_i$  - полюсы функции  $F(s)$ .

В общем случае, когда имеется  $m$  кратных полюсов вычет по кратному полюсу определяется по следующему соотношению:

$$f_i = \frac{1}{(m-1)!} [(s-s_i)^m F(s)e^{st}]^{(m-1)} \Big|_{s=s_i}. \quad (1.14)$$

В частном случае при  $m=2$  имеем:

$$f_i(t) = [(s-s_i)^2 F(s)e^{st}]^{(1)} \Big|_{s=s_i}, \quad (1.15)$$

а при  $m=1$  получаем более простое выражение:

$$f_i(t) = (s-s_i)F(s)e^{st} \Big|_{s=s_i}. \quad (1.16)$$

*Пример 1.12.* Дано изображение функции  $F(s)$  с некротными полюсами:

$$F(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)(s+3)}, \quad s_1 = -1, s_2 = -2, s_3 = -3.$$

В этом случае для определения вычетов можно воспользоваться соотношением (1.16):

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum \operatorname{Res} \frac{se^{st}}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \\
&= \frac{se^{st}}{(s+2)(s+3)} \Big|_{s=-1} + \frac{se^{st}}{(s+1)(s+3)} \Big|_{s=-2} + \frac{se^{st}}{(s+1)(s+2)} \Big|_{s=-3} \\
&= -0,5e^{-t} + 2e^{-2t} - 1,5e^{-3t}.
\end{aligned}$$

*Пример 1.13.* Пусть операторное изображение функции равно

$$F(s) = \frac{1}{(s+\alpha)^2}.$$

Отсюда имеем два кратных корня:  $s_1 = s_2 = -\alpha$ . Используя соотношение (1.15), получим:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{d}{ds} \left[ (s+\alpha)^2 \frac{1}{(s+\alpha)^2} e^{st} \right] = te^{st} \Big|_{s=-\alpha} = te^{-\alpha t}.$$

Таким образом, получили очевидный (по таблице Лапласа) результат.

Задача определения оригинала функции значительно усложняется при наличии комплексно-сопряженных полюсов. В реальных задачах этот случай встречается довольно часто.

*Пример 1.14.* Найти оригинал  $f(t)$ , соответствующий изображению

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}.$$

Вычисление полюсов показывает, что они некрратные, но комплексно-сопряженные:

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum \operatorname{Res} \frac{e^{st}}{\left(s + \frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(s + \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{e^{st}}{s + \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}} \Big|_{s = -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}} \\
&+ \frac{e^{st}}{s + \frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2}} \Big|_{s = -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{e^{-\frac{t}{2}} \cdot e^{j \frac{\sqrt{3}}{2} t}}{j \sqrt{3}} - \frac{e^{-\frac{t}{2}} \cdot e^{-j \frac{\sqrt{3}}{2} t}}{j \sqrt{3}} = \\
&= \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{j \sqrt{3}} \left( \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + j \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t - \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + j \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) = \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{t}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t.
\end{aligned}$$

Метод разложения на элементарные составляющие сводится к определению  $F(s)$  в следующей форме:

$$F(s) = \frac{r_1}{s - s_1} + \frac{r_2}{s - s_2} + \dots + \frac{r_n}{s - s_n} + q, \quad (1.17)$$

где  $s_i$  – полюсы;  $r_i$  - коэффициенты, определяемые с помощью вычетов;  $q$  - вещественный остаток.

Значение  $q$  вычисляется по теореме Лапласа о начальном значении

$$q = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s).$$

Как правило,  $q=0$ , так как порядок числителя  $F(s)$  обычно меньше порядка знаменателя.

Для вычисления коэффициентов  $r_i$  при некрратных полюсах  $s_i$  используется следующее соотношение:

$$r_i = (s - s_i)F(s)|_{s=s_i}. \quad (1.18)$$

Рассмотрим метод разложения на элементарные составляющие на примере.

*Пример 1.15.* Пусть

$$F(s) = \frac{2}{s^2 + 7s + 12}.$$

Полюсы в этом случае некрратные:  $s_1=-4$ ,  $s_2=-3$ . Поэтому имеем:

$$F(s) = \frac{2}{(s + 4)(s + 3)} = \frac{r_1}{s + 4} + \frac{r_2}{s + 3}.$$

Определение коэффициентов  $r_1$  и  $r_2$  осуществим по соотношению (1.18):

$$r_1 = \frac{2}{s + 3} \Big|_{s=-4} = -2; \quad r_2 = \frac{2}{s + 4} \Big|_{s=-3} = 2.$$

Таким образом, выражение  $F(s)$  равно:

$$F(s) = -\frac{2}{s + 4} + \frac{2}{s + 3}.$$

Далее, используя таблицу преобразования Лапласа, получим:

$$f(t) = -2e^{-4t} + 2e^{-3t}.$$

Если имеется полюс  $s_i$  кратности  $m$ , то разложение на простые дроби включает члены

$$\frac{r_i}{s - s_i} + \frac{r_{i+1}}{(s - s_i)^2} + \dots + \frac{r_{i+k-1}}{(s - s_i)^k} + \dots + \frac{r_{i+m-1}}{(s - s_i)^m}, \quad (1.18)$$

где  $k=1,2,\dots, m$ ;  $i$  – порядковый номер в общем разложении на элементарные составляющие.

В этом случае для определения вычетов необходимо использовать выражение:

$$r_{i+k-1} = \frac{1}{(m-1)!} [(s - s_i)^m F(s)]^{(m-k)} \Big|_{s=s_i}, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (1.19)$$

*Пример 1.16.* Требуется определить оригинал функции  $y(t)$  по изображению  $Y(s)$ :

$$Y(s) = \frac{4}{(s+2)^2(s+5)}.$$

Знаменатель указывает на наличие трех полюсов, два из которых являются кратными:  $s_1=s_2=-2$ ,  $s_3=-5$ . Разложение на элементарные составляющие с учетом (1.18) имеет следующий вид:

$$Y(s) = \frac{r_1}{s+2} + \frac{r_2}{(s+2)^2} + \frac{r_3}{s+5}.$$

Используя (1.19) для  $m=2$ , получим:

$$r_1 = \left[ \frac{4}{s+5} \right]^{(1)} = \frac{-4}{(s+5)^2} \Big|_{s=-2} = -\frac{4}{9};$$

$$r_2 = \frac{4}{s+5} \Big|_{s=-2} = \frac{4}{3}; \quad r_3 = \frac{4}{(s+2)^2} \Big|_{s=-5} = \frac{4}{9}.$$

Таким образом, для разложения  $Y(s)$  и оригинала  $y(t)$  имеем соответственно:

$$Y(s) = \frac{-4}{9(s+2)} + \frac{4}{3(s+2)^2} + \frac{4}{9(s+5)};$$

$$y(t) = -\frac{4}{9}e^{-2t} + \frac{4}{3}te^{-2t} + \frac{4}{9}e^{-5t}.$$

## 1.2. Применение преобразования Лапласа для исследования систем автоматического управления

### 1.2.1 Операторный метод решения дифференциальных уравнений

Динамические процессы в САУ описываются дифференциальными уравнениями. Решение последних лежит в основе методов исследования



качества автоматических систем. Операторный подход значительно упрощает процедуру получения искомого решения дифференциального уравнения. В его основе лежат рассмотренные выше прямое и обратное преобразования Лапласа. Рассмотрим применение операторного метода для решения дифференциальных уравнений с ненулевыми начальными условиями на основе ряда примеров.

*Пример. 1.17.* Пусть требуется решить однородное уравнение, описывающее свободное (автономное) движение САУ:

$$y^{(2)}(t) + 7y^{(1)}(t) + 10y(t) = 0, \text{ при } y(0) = 1, y^{(1)}(0) = 1.$$

Применим два первых свойства Лапласа к обеим частям уравнения. В результате получим:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y^{(1)}(0) + 7sY(s) - 7y(0) + 10Y(s) = 0,$$

или, подставив начальные условия и осуществив преобразование подобных элементов, будем иметь для выходной координаты:

$$Y(s) = \frac{s + 8}{s^2 + 7s + 10}.$$

Получение решения в функции времени сводится к применению обратного преобразования Лапласа. В рассматриваемом примере корни знаменателя выражения для  $Y(s)$  не являются кратными:  $s_1 = -2$ ,  $s_2 = -5$ . Поэтому для вычисления  $y(t)$  воспользуемся соотношением (1.16):

$$y(t) = \sum Res \frac{s + 8}{(s + 2)(s + 5)} e^{st} = \frac{s + 8}{s + 5} e^{st} \Big|_{s=-2} + \frac{s + 8}{s + 2} e^{st} \Big|_{s=-5} = 2e^{-2t} - e^{-5t}.$$

*Пример 1.18.* Решить дифференциальное уравнение, описывающее вынужденное движение САУ:

$$y^{(2)}(t) + 7y^{(1)}(t) + 12y(t) = 5e^{-3t} + 2$$

при следующих начальных условиях  $y(0) = 1$ ,  $y^{(1)}(0) = -1$ .

Применяя к обеим частям уравнения преобразование Лапласа, получим операторную форму дифференциального уравнения

$$s^2Y(s) - sy(0) - y^{(1)}(0) + 7sY(s) - 7y(0) + 12Y(s) = 5 \frac{1}{s + 3} + \frac{2}{s},$$

или с учётом значений начальных условий

$$s^2Y(s) + 7sY(s) + 12Y(s) = \frac{5}{s+3} + \frac{2}{s} + s + 6 = \frac{s^3 + 9s^2 + 25s + 6}{s(s+3)}.$$

Далее необходимо разрешить операторное уравнение относительно  $Y(s)$ :

$$Y(s) = \frac{s^3 + 9s^2 + 25s + 6}{(s^2 + 7s + 12)(s^2 + 3s)} = \frac{s^3 + 9s^2 + 25s + 6}{(s+3)(s+4)(s+3)s}.$$

Знаменатель этого выражения имеет четвертый порядок и содержит два кратных корня:  $s_1 = s_2 = -3, s_3 = -4, s_4 = 0$ . Это осложняет использование подхода, основанного на использовании соотношения (1.13). Поэтому воспользуемся для получения оригинала  $y(t)$  способом разложения изображения  $Y(s)$  на элементарные составляющие с последующим применением таблицы преобразования Лапласа:

$$Y(s) = \frac{r_1}{s+3} + \frac{r_2}{(s+3)^2} + \frac{r_3}{s+4} + \frac{r_4}{s},$$

где

$$r_1 = \frac{(3s^2 + 18s + 25)(s+4)s - (2s+4)(s^3 + 9s^2 + 25s + 6)}{(s+4)^2s^2} \Big|_{s=-3} = -\frac{8}{3};$$

$$r_2 = \frac{s^3 + 9s^2 + 25s + 6}{(s+4)s} \Big|_{s=-3} = 5; \quad r_3 = \frac{s^3 + 9s^2 + 25s + 6}{(s+3)^2s} \Big|_{s=-4} = \frac{7}{2};$$

$$r_4 = \frac{s^3 + 9s^2 + 25s + 6}{(s+3)^2(s+4)} \Big|_{s=0} = \frac{1}{6}.$$

Таким образом, разложение  $Y(s)$  с двумя кратными корнями  $s_{1,2} = -3$  имеет следующий вид:

$$Y(s) = \frac{-8}{3(s+3)} + \frac{5}{(s+3)^2} + \frac{7}{2(s+4)} + \frac{1}{6s}.$$

Используя таблицу Лапласа, от этого выражения можно перейти к оригиналу:

$$y(t) = -\frac{8}{3}e^{-3t} + 5te^{-3t} + \frac{7}{2}e^{-4t} + \frac{1}{6}.$$

### 1.2.2. Получение передаточных функций динамических звеньев и систем

В классической теории автоматического управления основными математическими моделями звеньев САУ и систем в целом являются так называемые передаточные функции (ПФ). Для реальных систем и устройств они получаются обычно на основе системы дифференциальных уравнений и алгебраических соотношений, а также с использованием способов, разработанных для конкретной предметной области (электротехника, электроника и др.).

В отличие от дифференциальных уравнений над передаточными функциями можно осуществлять алгебраические операции. Это достоинство предопределило их широкое использование в теории и практике управления в качестве математических моделей.

Основной способ определения ПФ связан с получением операторной формы дифференциального уравнения при нулевых начальных условиях. Пусть динамическое звено описывается уравнением  $n$ -го порядка

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = b_m x^{(m)}(t) + \dots + b_0 x(t).$$

Тогда применяя преобразование Лапласа к обеим частям уравнения, получим

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{(n-1)} Y(s) + \dots + a_0 Y(s) = b_m s^m X(s) + \dots + b_0 X(s).$$

На основе этого уравнения можно составить соотношение

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}, \quad (1.20)$$

которое собственно и получило название передаточной функции.

Таким образом, передаточная функция  $W(s)$  – это отношение изображения по Лапласу выходной координаты динамического звена или системы  $Y(s)$  к изображению его входной координаты  $U(s)$ . Обозначение ПФ может быть любым, хотя чаще всего ее представляют символами латинского или греческого алфавита.

*Пример 1.19.* Пусть электропривод описывается дифференциальным уравнением следующего вида:

$$T_1 T_2 x^{(3)} + T_1 x^{(2)} + x^{(1)} = k_d u,$$

где  $x$  – угол поворота;  $u$  – управляющее напряжение.

Применив к обеим частям этого уравнения преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях, получим соответствующее операторное уравнение

$$(T_1 T_2 s^3 + T_1 s^2 + s)X(s) = k_d U(s),$$

и далее из него искомую ПФ:

$$W(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{k_d}{s(T_1 T_2 s^2 + T_1 s + 1)}.$$

В общем случае динамическое звено или объект управления описываются системой дифференциальных и алгебраических уравнений. Это усложняет задачу получения ПФ, так как требуется осуществлять дополнительные преобразования исходной системы уравнений с целью исключения промежуточных координат.

Рассмотрим этот случай на примере получения ПФ электрического двигателя (ЭД) постоянного тока, схема замещения которого представлена на рис. 1.2. Здесь  $I_{я}$ ,  $U_{\partial}$  - соответственно ток и напряжение питания якорной цепи ЭД;  $\Omega$  - скорость вращения вала ЭД;  $M_c$  - приведенный к валу двигателя момент сопротивления;  $E$  - противо-э.д.с. якоря ЭД;  $L_{я}$  и  $R_{я}$  - соответственно индуктивность и сопротивление якорной цепи;  $OB$  - обмотка возбуждения ЭД;  $H$  - нагрузка (шпиндель, насос и др.).

Данная электромеханическая схема описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} U_{\partial} &= E + R_{я} I_{я} + L_{я} \dot{I}_{я}^{(1)}, \\ E &= c_E \Omega, \\ M - M_c &= J \dot{\Omega}^{(1)}, \\ M &= c_M I_{я}, \end{aligned}$$

где  $M$  - момент, развиваемый электродвигателем;  $J$  - приведённый к валу двигателя момент инерции;  $c_E$ ,  $c_M$  - коэффициенты пропорциональности.

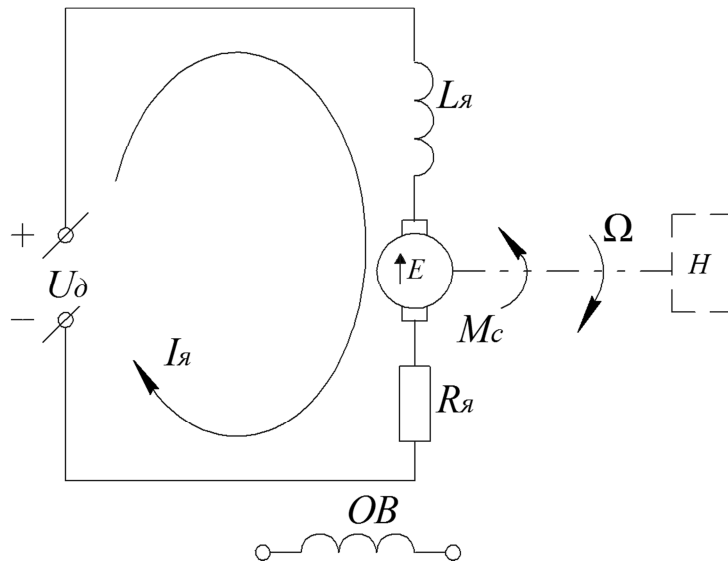


Рис. 1.2

Преобразуем эту систему уравнений с применением операторного метода, исключив при этом все промежуточные координаты, кроме  $U_\partial$ ,  $M_C$  и  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} U_\partial(s) &= c_e \Omega(s) + R_\text{я} I_\text{я}(s) + L_\text{я} s I_\text{я}(s), \\ c_\text{м} I_\text{я}(s) &= M_C(s) + J s \Omega(s). \end{aligned}$$

После подстановки  $I_\text{я}(s)$  из второго уравнения в первое будем иметь одно уравнение в операторной форме:

$$U_\partial(s) = c_E \Omega(s) + (R_\text{я} + L_\text{я} s) \frac{M_C(s) + J s \Omega(s)}{c_\text{м}}.$$

Разрешим последнее соотношение относительно  $\Omega(s)$ :

$$\frac{L_\text{я} J}{c_E c_\text{м}} s^2 \Omega(s) + \frac{R_\text{я} J}{c_E c_\text{м}} s \Omega(s) + \Omega(s) = \frac{1}{c_E} U_\partial(s) - \frac{R_\text{я}}{c_E c_\text{м}} \left( \frac{L_\text{я}}{R_\text{я}} s + 1 \right) M_C(s).$$

Введя специальные обозначения, можно записать

$$(T_\text{э} T_\text{м} s^2 + T_\text{м} s + 1) \Omega(s) = K_\partial U_\partial(s) - K_C (T_\text{э} s + 1) M_C(s),$$

где  $T_\text{э} = \frac{L_\text{я}}{R_\text{я}}$  – электромагнитная постоянная времени;

$T_\text{м} = \frac{R_\text{я} J}{c_e c_\text{м}}$  – электромеханическая постоянная времени;

$K_\partial = \frac{1}{c_E}$ ,  $K_C = \frac{R_\text{я}}{c_E c_\text{м}}$  – соответственно коэффициенты передач по

напряжению  $U_\partial$  и моменту сопротивления  $M_C$ .

Теперь разрешим полученное соотношение относительно  $\Omega(s)$ :

$$\Omega(s) = \frac{K_{\partial}}{T_{\partial}T_M s^2 + T_M s + 1} U_{\partial}(s) - \frac{K_C(T_{\partial} s + 1)}{T_{\partial}T_M s^2 + T_M s + 1} M_C(s)$$

или в сокращенной форме

$$\Omega(s) = W_{\partial}(s)U_{\partial}(s) - W_C(s)M_C(s),$$

где

$$W_{\partial}(s) = \frac{\Omega(s)}{U_{\partial}(s)} = \frac{K_{\partial}}{T_{\partial}T_M s^2 + T_M s + 1} - \text{ПФ электродвигателя по } U_{\partial};$$

$$W_C = \frac{\Omega(s)}{M_C(s)} = \frac{K_C(T_{\partial} s + 1)}{T_{\partial}T_M s^2 + T_M s + 1} - \text{ПФ электродвигателя по } M_C.$$

Использованный подход к получению передаточных функций является наиболее общим. В ряде случаев процедуру определения ПФ можно значительно упростить, в частности, при получении ПФ электрических корректирующих устройств и цепей, используя правила и приемы, разработанные в электротехнике и электронике.

Рассмотрим методику определения передаточных функций активных фильтров. Они строятся на основе операционных усилителей и применяются в автоматических системах, как правило, в качестве аналоговых регуляторов. Общая схема фильтров приведена на рис.1.3, где  $Z_{ex}(s)$ ,  $Z_0(s)$  - соответственно сопротивления входной цепи и цепи обратной связи, записанные в операторной форме;  $U_{ex}$ ,  $U_{вых}$  - входное и выходное напряжения фильтра.

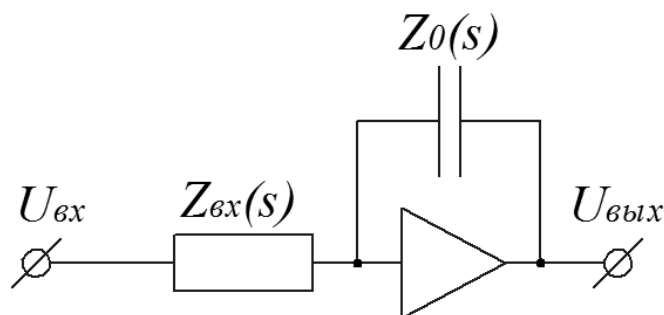


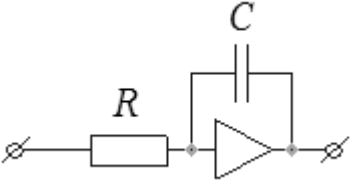
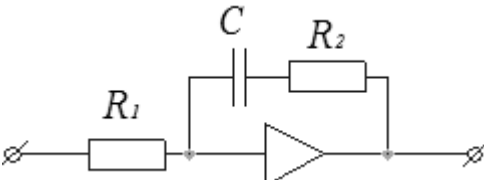
Рис. 1.3

Из теории аналоговых фильтров известно, что передаточная функция равна отношению сопротивления цепи обратной связи  $Z_0(s)$  к сопротивлению входа  $Z_{ex}(s)$ :

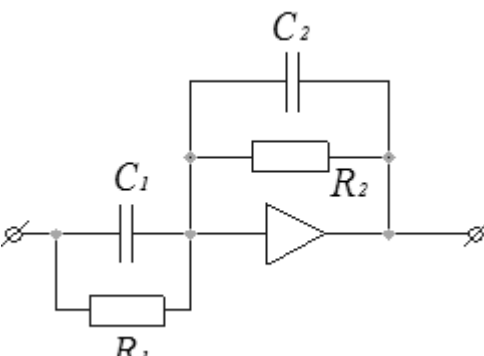
$$W(s) = \frac{U_{вых}(s)}{U_{вх}(s)} = \frac{Z_0(s)}{Z_{вх}(s)}. \quad (1.21)$$

Для ряда наиболее часто встречающихся схем передаточные функции с процедурой их получения приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

	$W(s) = \frac{1}{sRC} = \frac{1}{Ts} = \frac{k}{s},$ $T=RC, \quad k=1/T$
	$W(s) = \frac{R_2 + \frac{1}{sC}}{R_1} = \frac{R_2Cs + 1}{R_1Cs} = \frac{T_1s + 1}{T_2s},$ $T_1 = R_2C, \quad T_2 = R_1C$

Окончание табл. 1.2

	$W(s) = \frac{\frac{R_2}{R_2C_2s + 1}}{\frac{R_1}{R_1C_1s + 1}} = \frac{k(T_1s + 1)}{T_2s + 1},$ $k = \frac{R_2}{R_1}, \quad T_1 = R_1C_1, \quad T_2 = R_2C_2$
--	--

Пассивные корректирующие цепи являются простейшими четырёхполюсниками. Передаточные функции такого рода цепей определяются в виде операторного коэффициента передачи делителя напряжения:

$$W(s) = \frac{U_{\text{ВЫХ}}(s)}{U_{\text{ВХ}}(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}. \quad (1.22)$$

В качестве примера рассмотрим наиболее часто используемый пассивный фильтр, представленный на рис. 1.4.

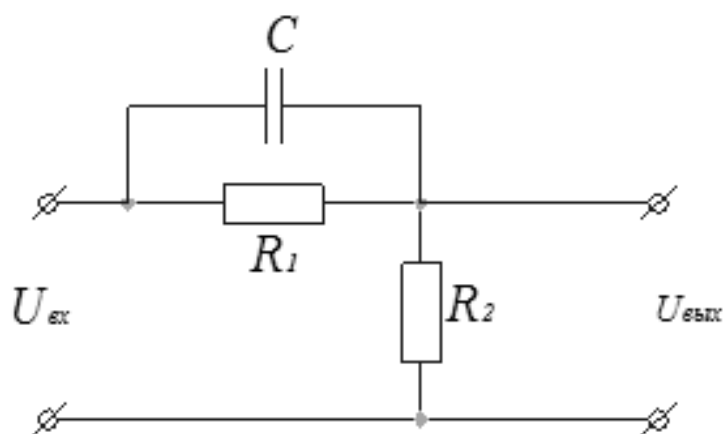


Рис. 1.4

В этом случае имеем

$$Z_2(s) = R_2, \quad Z_1(s) = \frac{R_1}{R_1Cs + 1}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_1}{R_1Cs + 1}} = \frac{R_2(R_1Cs + 1)}{R_2R_1Cs + R_2 + R_1} = \frac{R_2}{R_2 + R_1} \cdot \frac{R_1Cs + 1}{\frac{R_2}{R_2 + R_1}R_1Cs + 1} \\ &= \frac{k(T_1s + 1)}{T_2s + 1}, \end{aligned}$$

где  $k = R_2/(R_2 + R_1)$ ,  $T_1 = R_1C$ ,  $T_2 = kT_1$ .

В заключение можно отметить, что ПФ большинства часто используемых устройств, в том числе двигателей, активных и пассивных фильтров, имеются в учебной и справочной литературе. Это значительно облегчает применение операторного метода для исследования САУ.

### ***1.2.3. Применение передаточных функций для описания систем автоматического управления***

В классической теории автоматического управления САУ представляется обычно так называемой структурной схемой, которая состоит из звеньев однонаправленного действия, имеющих один вход и один выход. Каждому звену придается математическое описание в виде передаточной функции (рис. 1.5).



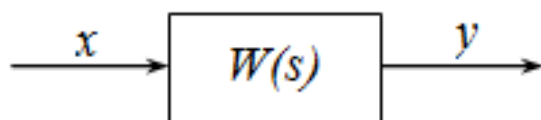


Рис. 1.5

В общем случае САУ имеет довольно сложную структуру, что существенно затрудняет ее исследование. Поэтому часто ставится задача упрощения структурной схемы до необходимого уровня. Наиболее простой способ решения этой задачи заключается в выделении в данной схеме так называемых типовых соединений звеньев и заменой их одним звеном с соответствующим описанием в виде ПФ. Эту операцию можно осуществлять многократно до получения желаемого вида структурной схемы. Согласно теории автоматического управления в структурных схемах САУ встречаются три типовых соединения: последовательное, параллельное и встречно-параллельное.

На рис. 1.6 представлена структура *последовательного соединения* звеньев. Требуется определить ПФ данного соединения.

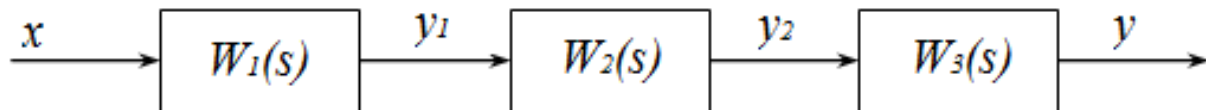


Рис. 1.6

Очевидно, что для этого соединения можно записать

$$y = W_3(s)y_2 = W_3(s)W_2(s)y_1 = W_1(s)W_2(s)W_3(s)x$$

или

$$y = W(s)x,$$

где  $W(s) = W_1(s)W_2(s)W_3(s)$  - искомая ПФ.

Таким образом, ПФ последовательно соединенных звеньев равна произведению передаточных функций этих звеньев, т.е.

$$W(s) = \prod_{i=1}^n W_i(s), \quad (1.23)$$

где  $n$  – число звеньев.

Пусть, например,

$$W_1(s) = \frac{k_1}{s}; \quad W_2(s) = \frac{k_0}{T_0s + 1}.$$

Тогда результирующая ПФ последовательного соединения равна:

$$W(s) = \frac{k_1 k_0}{s(T_0s + 1)}.$$

Схема *параллельного соединения* трех звеньев представлена на рис. 1.7.

Для этой структуры можно записать:

$$y = y_1 + y_2 + y_3 = W_1(s)x + W_2(s)x + W_3(s)x = [W_1(s) + W_2(s) + W_3(s)]x.$$

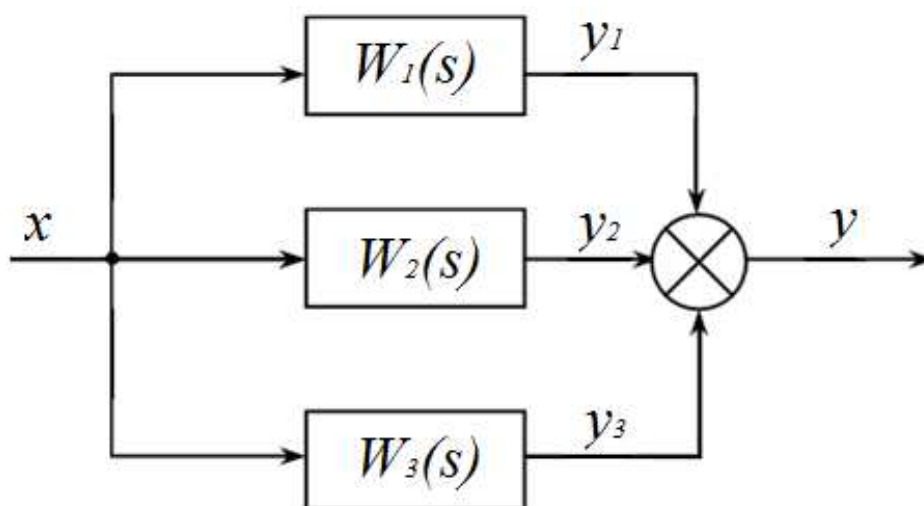


Рис. 1.7

Отсюда имеем:

$$W(s) = \frac{y}{x} = W_1(s) + W_2(s) + W_3(s).$$

Таким образом, передаточная функция параллельно соединенных звеньев равна сумме ПФ этих звеньев.

$$W(s) = \sum_{i=1}^n W_i(s), \quad (1.24)$$

где  $n$  – число звеньев.

Для приведенных выше звеньев с ПФ  $W_1(s)$  и  $W_2(s)$  в случае их параллельного соединения получим:

$$W(s) = \frac{k_1}{s} + \frac{k_0}{T_0s + 1} = \frac{(k_1 T_0 + k_0)s + k_1}{s(T_0s + 1)}.$$

Встречно-параллельное соединение состоит из двух звеньев, соединенных по схеме с отрицательной обратной связью (рис. 1.8), которая характерна для автоматических систем. Здесь зачерненный сегмент означает знак минус.

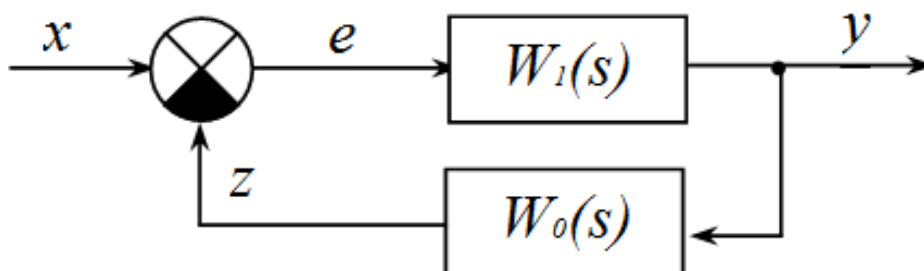


Рис. 1.8

Для получения ПФ этого соединения следует осуществить следующую преобразования:

$$y = W_1(s)e = W_1(s)(x - z) = W_1(s)x - W_1(s)W_0(s)y,$$

откуда имеем

$$[1 + W_1(s)W_0(s)]y = W_1(s)x$$

или окончательно

$$W(s) = \frac{y}{x} = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)W_0(s)}. \quad (1.25)$$

Например, пусть интегратор охвачен отрицательной обратной связью с безынерционным звеном (рис. 1.9).

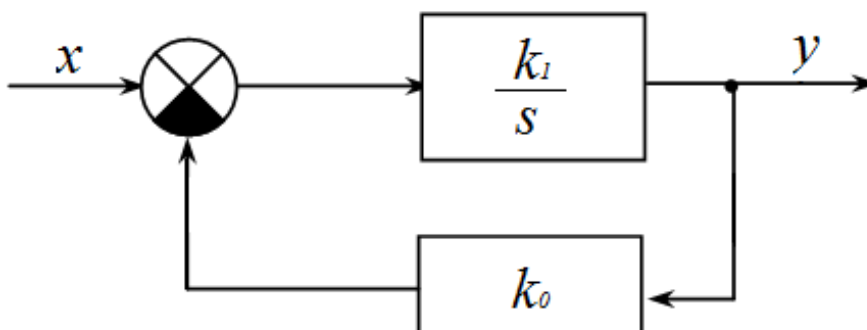


Рис. 1.9

В этом случае результирующая ПФ будет равна:

$$W(s) = \frac{\frac{k_1}{s}}{1 + \frac{k_1}{s}k_0} = \frac{k_1}{s + k_1k_0}.$$

Рассмотрим теперь на примере применение рассмотренных правил получения передаточных функций типовых соединений звеньев САУ для определения ПФ автоматической системы, структурная схема которой представлена на рис. 1.10.

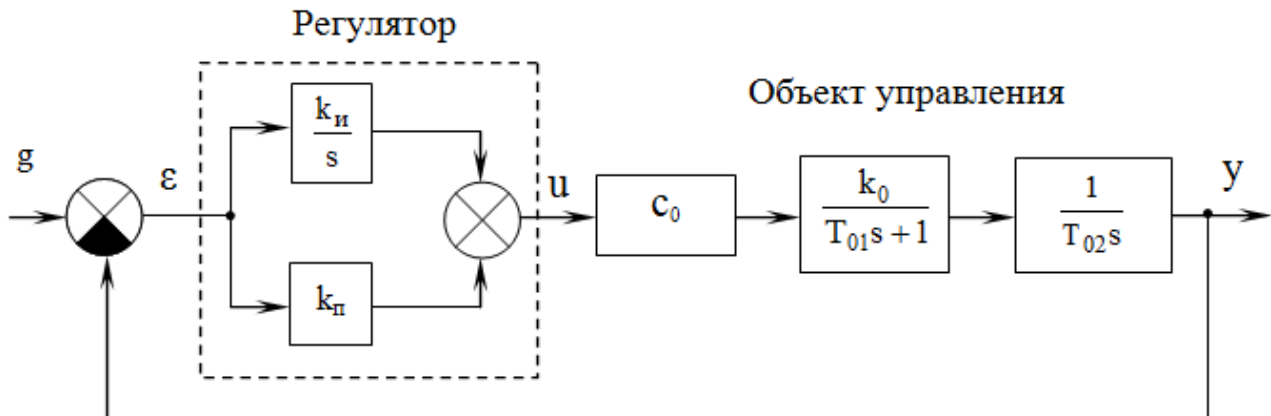


Рис. 1.10

В этой схеме регулятор состоит из двух параллельно соединенных звеньев, поэтому на основе (1.24) его ПФ равна:

$$W_r(s) = \frac{k_{\text{и}}}{s} + k_{\text{п}} = \frac{k_{\text{п}}s + k_{\text{и}}}{s} = \frac{\tau s + 1}{T_{\text{и}}s},$$

где  $\tau = k_{\text{п}}/k_{\text{и}}$ ,  $T_{\text{и}} = 1/k_{\text{и}}$ .

Прямой канал управления включает последовательно соединенные звенья. Отсюда для ПФ этого канала имеем:

$$W(s) = \frac{\tau s + 1}{T_{\text{и}}s} \cdot c_0 \cdot \frac{k_0}{T_{01}s + 1} \cdot \frac{1}{T_{02}s} = \frac{k(\tau s + 1)}{s^2(T_{01} + 1)},$$

где  $k = \frac{c_0 k_0}{T_{01} T_{\text{и}}}$ .

Таким образом, структура САУ значительно упростилась. Теперь она представляет собой встречно-параллельное соединение двух звеньев, при этом ПФ цепи обратной связи равна единице. Применяв полученное выше правило для этого соединения (1.25), получим:

$$\Phi(s) = \frac{W}{1+W} = \frac{\frac{k(\tau s + 1)}{s^2(T_{01}s + 1)}}{1 + \frac{k(\tau s + 1)}{s^2(T_{01}s + 1)}} = \frac{k(\tau s + 1)}{T_{01}s^3 + s^2 + k\tau s + k} .$$

Особую роль в исследовании САУ играет так называемая ПФ *разомкнутой системы*, которая получается как произведение передаточных функций всех звеньев, находящихся в замкнутом контуре регулирования системы. Она очень часто используется при проектировании и исследовании автоматических систем, в частности, по ней строят логарифмические частотные характеристики, с помощью которых определяют устойчивость и показатели качества системы, а также осуществляют синтез САУ.

Пусть ПФ разомкнутой системы в общем виде представляет отношение двух операторных полиномов:

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)},$$

тогда можно получить так называемое *характеристическое уравнение* системы, приравняв нулю знаменатель ПФ замкнутой САУ:

$$1 + W(s) = 0$$

или окончательно

$$A(s) + B(s) = 0 .$$

Таким образом, для получения характеристического уравнения необходимо сложить операторные полиномы числителя и знаменателя ПФ разомкнутой системы и приравнять результат нулю. В рассмотренном выше примере характеристический полином был получен как знаменатель ПФ замкнутой системы:

$$L(s) = T_{01}s^3 + s^2 + k\tau s + k .$$

Характеристическое уравнение имеет очень важное значение в теории управления. По существу это левая часть дифференциального уравнения, которое описывает автономный режим работы САУ. По нему вычисляются собственные числа (полюсы) системы, которые в основном определяют динамические свойства автоматической системы.

Следует заметить, что в сложных по структуре САУ не всегда удается применять методику выделения типовых соединений звеньев с последующим определением передаточных функций системы. Эта ситуация, например, возникает, когда некоторые контуры регулирования пересекаются между собой.

Обычно для развязки контуров применяют известные в теории автоматического управления методы структурного преобразования. Однако, это довольно трудоемкий путь. Для определения передаточных функций замкнутой системы можно использовать другой подход. Он связан с применением формулы (правила) Мейсона [10], которая в общем случае имеет следующий вид:

$$\Phi(s) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n H_k \Delta_k = \frac{1}{\Delta} (H_1 \Delta_1 + H_2 \Delta_2 + \dots + H_n \Delta_n), \quad (1.26)$$

где  $\Phi(s)$  – передаточная функция для выходной координаты по входному воздействию или возмущению;

$\Delta=1$  - (сумма произведений ПФ всех имеющихся контуров)

+ (сумма попарных произведений ПФ всех непересекающихся контуров)

- (сумма произведений ПФ всех возможных комбинаций непересекающихся контуров, взятых по три)

+ (... , взятых по четыре) - (... , взятых по пять) + ... ;

$n$  – число прямых путей от входа (возмущения) к выходу;

$H_k$  – ПФ  $k$ -го прямого пути;

$\Delta_k$  – значение  $\Delta$  для той части структуры, которая не касается  $k$ -го прямого пути.

Покажем применение формулы Мейсона (1.26) для определения ПФ на примере САУ, структурная схема которой представлена на рис. 1.11. Требуется получить передаточные функции для выходной координаты  $y(t)$  и рассогласования  $e(t)$  по входу  $x(t)$ .

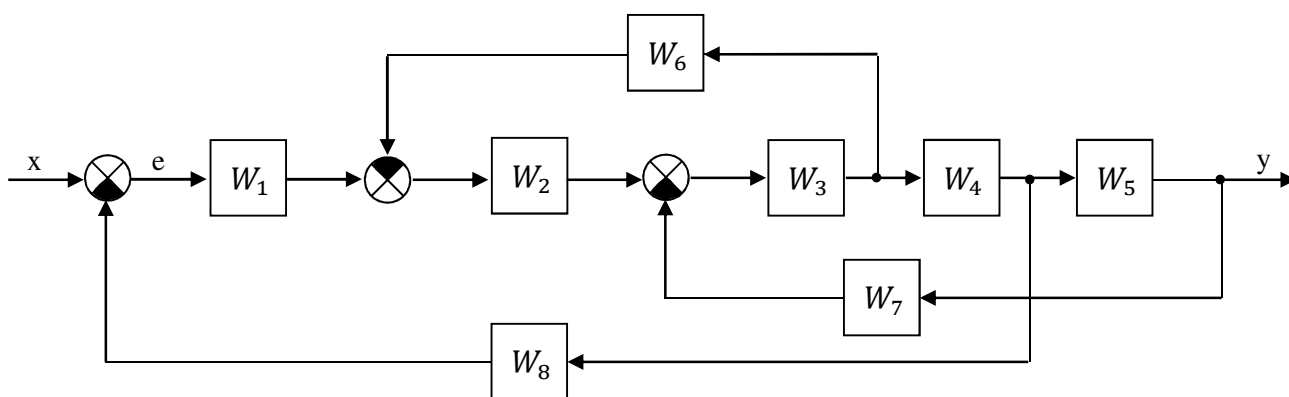


Рис. 1.11

Следует отметить, что в этой схеме имеется только один прямой путь от входа  $x(t)$  к выходу  $y(t)$  с ПФ  $H_1(s) = W_1 W_2 W_3 W_4 W_5$ . Все контуры регулирования касаются этого пути, поэтому  $\Delta_1 = 0$ . Один прямой путь также

имеется между входом  $x(t)$  и рассогласованием  $e(t)$  с передаточной функцией  $H_1(s)=1$ . Однако этого пути не касаются два пересекающихся между собой контура регулирования, поэтому в соответствии с правилом Мейсона получим  $\Delta_1 = 1 + W_2W_3W_6 + W_3W_4W_5W_7$ . Таким образом, для искомым ПФ можно записать:

$$\Phi_x^y(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{W_1W_2W_3W_4W_5(1-0)}{1 + W_2W_3W_6 + W_3W_4W_5W_7 + W_1W_2W_3W_4W_8},$$

$$\Phi_x^e(s) = \frac{E(s)}{X(s)} = \frac{H_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{1 \cdot (1 + W_2W_3W_6 + W_3W_4W_5W_7)}{1 + W_2W_3W_6 + W_3W_4W_5W_7 + W_1W_2W_3W_4W_8}.$$

Необходимо отметить, что соотношение (2.25), полученное для встречно-параллельного соединения, является частным случаем формулы Мейсона.

#### **1.2.4. Применение передаточных функций для определения динамических процессов в САУ**

Если известны ПФ системы  $W(s)$  и изображение по Лапласу входного воздействия  $U(s)$ , то можно записать в операторной форме выражение для выходной координаты  $Y(s)$ :

$$Y(s) = W(s)U(s). \quad (1.27)$$

В качестве  $u(t)$  часто используют тестовые элементарные сигналы, в частности, единичное скачкообразное воздействие. В последнем случае в результате определяется так называемая *переходная характеристика* системы (ПХ), по которой можно оценить качество САУ.

*Пример 1.20.* Пусть САУ описывается передаточной функцией второго порядка

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{100}{s^2 + 7s + 10}.$$

Необходимо определить реакцию системы на скачкообразное воздействие  $u(t) = 1(t)$ . Изображение этой функции по Лапласу известно (см. табл.1.1):

$$U(s) = \frac{1}{s}.$$

Отсюда для выходной координаты имеем

$$Y(s) = W(s)U(s) = \frac{100}{s(s^2 + 7s + 10)}.$$

Далее как и в ранее рассмотренных примерах, используя различные подходы к определению оригинала  $y(t)$ , можно получить искомое выражение для ПХ. Вычислим ее прямым методом с использованием вычетов:

$$y(t) = \sum \text{Res } Y(s)e^{st} = \sum \text{Res} \frac{100}{s(s^2 + 7s + 10)} e^{st}.$$

Корни знаменателя  $Y(s)$  равны соответственно  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = -5$ ,  $s_3 = -2$ , т.е. кратных полюсов нет. Отсюда

$$\begin{aligned} y(t) &= 100 \left[ \frac{e^{st}}{s^2 + 7s + 10} \Big|_{s=0} + \frac{e^{st}}{s(s+2)} \Big|_{s=-5} + \frac{e^{st}}{s(s+5)} \Big|_{s=-2} \right] = \\ &= 100 \left[ \frac{1}{10} + \frac{e^{-5t}}{15} - \frac{e^{-2t}}{6} \right] = 10 + \frac{20}{3} e^{-5t} - \frac{50}{3} e^{-2t}. \end{aligned}$$

Если в качестве входного воздействия используется более сложный сигнал, то методика расчета переходного процесса не изменится. В этом случае рекомендуется сначала получить его изображение  $U(s)$ , а затем определить по соотношению (1.27) выражение для выходной координаты.

*Пример 1.21.* Определим реакцию САУ из примера 1.20 на входное воздействие следующего вида:

$$u(t) = 5te^{-3t}.$$

Его изображение по Лапласу равно:

$$U(s) = 5(s+3)^{-2}.$$

В этом случае для выходной координаты можно записать:

$$Y(s) = W(s)U(s) = \frac{500}{(s+2)(s+5)(s+3)^2}.$$

Таким образом, имеем четыре полюса, два из которых являются кратными:

$$s_1 = -2, \quad s_2 = -5, \quad s_3 = -3, \quad s_4 = -3.$$



Для определения выходной координаты в функции времени  $y(t)$  воспользуемся методом разложения на элементарные составляющие. Для  $Y(s)$  в этом случае имеем:

$$Y(s) = \frac{r_1}{s+2} + \frac{r_2}{s+5} + \frac{r_3}{s+3} + \frac{r_4}{(s+3)^2},$$

где

$$r_1 = \frac{500}{(s+5)(s+3)^2} \Big|_{s=-2} = \frac{500}{3}; \quad r_2 = \frac{500}{(s+2)(s+3)^2} \Big|_{s=-5} = -\frac{125}{3};$$

$$r_3 = \left[ \frac{500}{(s+2)(s+5)} \right]^{(1)} = \frac{-500(2s+7)}{(s^2+7s+10)^2} \Big|_{s=-3} = -125;$$

$$r_4 = \frac{500}{(s+2)(s+5)} \Big|_{s=-3} = -250.$$

Таким образом, для разложения  $Y(s)$  имеем окончательно:

$$Y(s) = \frac{500}{3(s+2)} - \frac{125}{3(s+5)} - \frac{125}{s+3} - \frac{250}{(s+3)^2}.$$

Используя таблицу Лапласа, получим на основе выражения  $Y(s)$  выходную координату в функции времени:

$$y(t) = \frac{500}{3} e^{-2t} - \frac{125}{3} e^{-5t} - 125 e^{-3t} + 250 t e^{-3t}.$$

В заключение по вопросу использования преобразования Лапласа следует отметить следующее. В реальных САУ передаточная функция замкнутой системы, как правило, имеет высокий порядок. В связи с этим трудоемкость аналитического способа определения переходных процессов значительно возрастает. Поэтому для облегчения операций, связанных с применением передаточных функций при проектировании и исследовании САУ, в теории и практике автоматического управления широко используется среда MatLab с приложением *Control System Toolbox*. В этом приложении имеется ряд функций для создания моделей ПФ в среде MatLab, с которыми можно осуществлять ряд полезных операции, в том числе рассчитывать переходные процессы и строить их графики [3].

## Упражнения к главе 1

1.1. Получить операторную форму дифференциального уравнения:

$$y^{(2)}(t) + 9y^{(1)}(t) + 20y(t) = 5e^{-3t}, \quad y(0) = 2, \quad y^{(1)}(0) = -1;$$

$$y^{(2)}(t) + 6y^{(1)}(t) + 8y(t) = 3e^{-5t} + 2, \quad y(0) = -3, \quad y^{(1)}(0) = 1;$$

$$y^{(2)}(t) + 10y^{(1)}(t) + 16y(t) = 4 \cos 3t, \quad y(0) = 3, \quad y^{(1)}(0) = -2.$$

1.2. Определить изображение произведения двух функций:

$$f_1(t) = \cos 5t, \quad f_2(t) = 3e^{-2t}.$$

1.3. Получить начальные и конечные значения функции  $f(t)$  по ее изображению  $F(s)$ :

$$F(s) = \frac{s + 7}{s^2 + 5s + 6}.$$

1.4. Определить оригиналы функции  $f(t)$  по изображению  $F(s)$ :

$$F(s) = \frac{2}{s(s^2 + 8s + 12)}, \quad F(s) = \frac{5}{(s + 2)(s + 6)^2}, \quad F(s) = \frac{3}{s^2 + 6s + 13}.$$

1.5. Получить решение дифференциальных уравнений:

$$y^{(2)}(t) + 9y^{(1)}(t) + 14y(t) = 3e^{-4t} + 5, \quad y(0) = -2, \quad y^{(1)}(0) = 2;$$

$$y^{(2)}(t) + 6y^{(1)}(t) + 5y(t) = -3e^{-2t} + 2, \quad y(0) = 3, \quad y^{(1)}(0) = -1;$$

$$y^{(2)}(t) + 4y^{(1)}(t) + 3y(t) = 5e^{-5t}, \quad y(0) = 2, \quad y^{(1)}(0) = 1;$$

$$y^{(2)}(t) + 7y^{(1)}(t) + 6y(t) = 2e^{-t}, \quad y(0) = 3, \quad y^{(1)}(0) = -1;$$

$$y^{(2)}(t) + 10y^{(1)}(t) + 21y(t) = 5e^{-7t}, \quad y(0) = -3, \quad y^{(1)}(0) = 1;$$

1.6. Определить передаточные функции активных и пассивных фильтров:

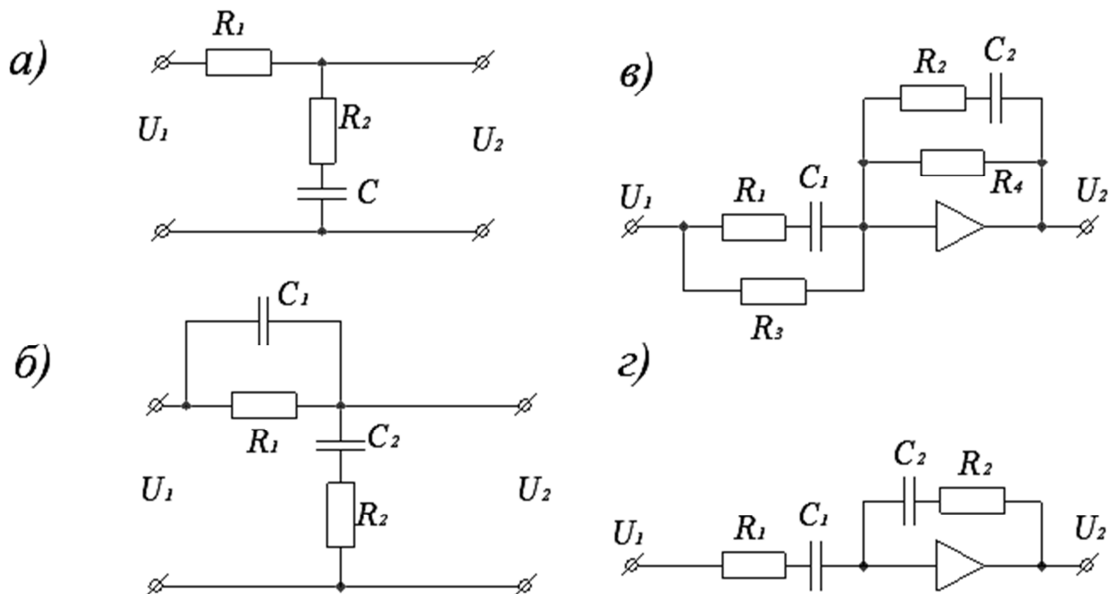


Рис. 1.12

1.7. Для системы регулирования, приведенной на рис. 1.10, получить с помощью правила Мейсона передаточные функции по входу  $g(t)$ :

а) для сигнала управления  $u(t)$ ;

б) для ошибки  $\varepsilon(t)$ .

1.8. Для электродвигателя постоянного тока, структурная схема которого представлена на рис. 1.13, получить следующие передаточные функции:

$$W(s) = \frac{\Omega(s)}{U_3(s)} ; W(s) = \frac{\Omega(s)}{M_c(s)} ; W(s) = \frac{M(s)}{U_3(s)} ; W(s) = \frac{I_\pi(s)}{M_c(s)} .$$

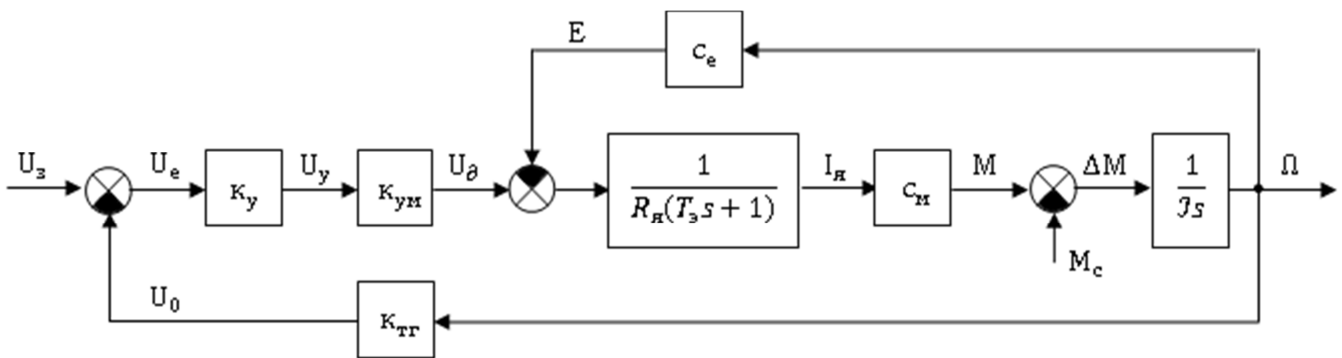


Рис. 1.13

1.9. Определить реакцию системы с передаточной функцией  $W(s)$  на заданное входное воздействие  $u(t)$ :

а)  $W(s) = \frac{5}{s^2 + 9s + 16}$  ,  $u(t) = 2 \cdot 1(t)$  ;

б)  $W(s) = \frac{10}{s^2 + 10s + 21}$  ,  $u(t) = 1(t)$  ;

в)  $W(s) = \frac{15}{s^2 + 6s + 8}$  ,  $u(t) = 3 \cdot 1(t)$  ;

г)  $W(s) = \frac{10}{s^2 + 10s + 24}$  ,  $u(t) = 2e^{-4t} + 5$  ;

д)  $W(s) = \frac{5}{s(s^2 + 5s + 4)}$  ,  $u(t) = 5e^{-t}$  .

## *Контрольные вопросы к главе 1*

- 1.1. Приведите выражения для прямого и обратного преобразования Лапласа.
- 1.2. В чем заключается свойство линейности преобразования Лапласа?
- 1.3. Приведите выражение для получения изображения по Лапласу производных непрерывной функции?
- 1.4. Поясните процедуру применения теоремы о смещении при определении изображения функции времени с запаздыванием.
- 1.5. Как определить начальное и конечное значения функции времени по ее изображению?
- 1.6. Запишите выражение для вычисления оригинала функции по его операторному изображению с использованием вычетов.
- 1.7. Как разложить изображение функции на элементарные составляющие при отсутствии кратных полюсов?
- 1.8. Поясните особенности разложения изображения функции на простые дроби при наличии кратных полюсов.
- 1.9. Как получить оригинал функции по его изображению, представленного в виде элементарных составляющих?
- 1.10. Поясните методику применения операторного подхода к решению дифференциальных уравнений при ненулевых начальных условиях.
- 1.11. Дайте определение передаточной функции динамической системы.
- 1.12. Как получить передаточную функцию активного фильтра?
- 1.13. Как определить передаточную функцию системы по ее дифференциальному уравнению?
- 1.14. Сформулируйте правила получения результирующих передаточных функций при последовательном и параллельном соединениях звеньев САУ?
- 1.15. Как получить характеристическое уравнение по передаточной функции разомкнутой системы?
- 1.16. Поясните на примере применение метода Мейсона для определения передаточных функций многоконтурных САУ.
- 1.17. Как получить переходную характеристику САУ по ее передаточной функции?
- 1.18. Поясните методику определения реакции динамической системы, заданной передаточной функцией, на типовые входные воздействия.

## Глава 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И РЯДЫ ФУРЬЕ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

### 2.1. Преобразование Фурье

#### 2.1.1. Общие сведения о преобразовании Фурье

Преобразование Фурье может быть применено к функциям  $f(t)$ , которые удовлетворяют условиям Дирихле и абсолютно интегрируемы на всей оси времени  $t > 0$ . Прямое преобразование Фурье имеет следующий вид:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (2.1)$$

где  $F(j\omega)$  - изображение функции  $f(t)$  по Фурье, которое часто называют спектральной характеристикой;  $\omega$  - круговая частота (рад/с).

Преобразование Фурье является частным случаем преобразования Лапласа:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (2.2)$$

в котором  $s = \sigma + j\omega$ .

Очевидно, что при  $\sigma = 0$  интеграл (2.2) вырождается в преобразование (2.1). Таким образом, для получения преобразования Фурье элементарных функций можно воспользоваться таблицей Лапласа с последующей подстановкой  $s = j\omega$  в изображение функции  $F(s)$ .

Покажем идентичность преобразований на примере определения спектральной характеристики  $F(j\omega)$  для функции

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{-\alpha t}, \quad \alpha > 0, \quad t > 0. \\ F(j\omega) &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt = -\frac{1}{\alpha + j\omega} e^{-(\alpha + j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \\ &= -\frac{1}{\alpha + j\omega} (0 - 1) = \frac{1}{\alpha + j\omega}, \end{aligned}$$

т.е. получили такой же результат, как в таблице Лапласа при  $s = j\omega$ .

Очевидно, что свойства преобразования Фурье подобны свойствам преобразования Лапласа.

Обратное преобразование Фурье имеет следующий вид:

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad t > 0. \quad (2.3).$$

Для получения оригинала  $f(t)$  обычно используется другое соотношение, связанное с определением вычетов в полюсах  $\omega = \omega_k$  изображения  $F(j\omega)$ :

$$f(t) = j \sum_{k=1}^n \text{Res} F(j\omega) e^{j\omega t} \Big|_{\omega=\omega_k}. \quad (2.4)$$

*Пример 2.1.* Пусть

$$F(j\omega) = \frac{c}{\alpha + j\omega}, \quad c > 0.$$

Имеем один полюс  $\omega = -\frac{\alpha}{j}$  и соответственно

$$f(t) = j \text{Res} \frac{c}{j\left(\omega + \frac{\alpha}{j}\right)} e^{j\omega t} = c e^{j\omega t} \Big|_{\omega=-\frac{\alpha}{j}} = c e^{-\alpha t}.$$

### 2.1.2. Применение преобразования Фурье

Анализ выше рассмотренных преобразований Лапласа и Фурье показывает, что для решения дифференциальных уравнений удобнее использовать преобразования Лапласа. Преобразование Фурье в теории автоматического управления применяется для частотного анализа динамических систем.

Частотные характеристики (ЧХ) удобно определять на основе передаточных функций  $W(s)$ . Для этого в последние делается подстановка  $s=j\omega$ . В результате получается так называемая комплексная передаточная функция:

$$W(j\omega) = W(s) \Big|_{s=j\omega}. \quad (2.5)$$

Данная передаточная функция является функцией комплексного переменного и может быть представлена в следующих формах:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = U(\omega) + jV(\omega), \quad (2.6)$$

где  $A(\omega)$  - амплитудная частотная характеристика (АЧХ);

$\varphi(\omega)$  - фазовая частотная характеристика (ФЧХ);

$U(\omega)$  - вещественная частотная характеристика (ВЧХ);

$V(\omega)$  - мнимая частотная характеристика (МЧХ).

Данные характеристики взаимосвязаны между собой однозначно. По ним можно построить амплитудно-фазовую характеристику (АФХ), которая по сути является годографом комплексной ПФ  $W(j\omega)$  (рис. 2.1).

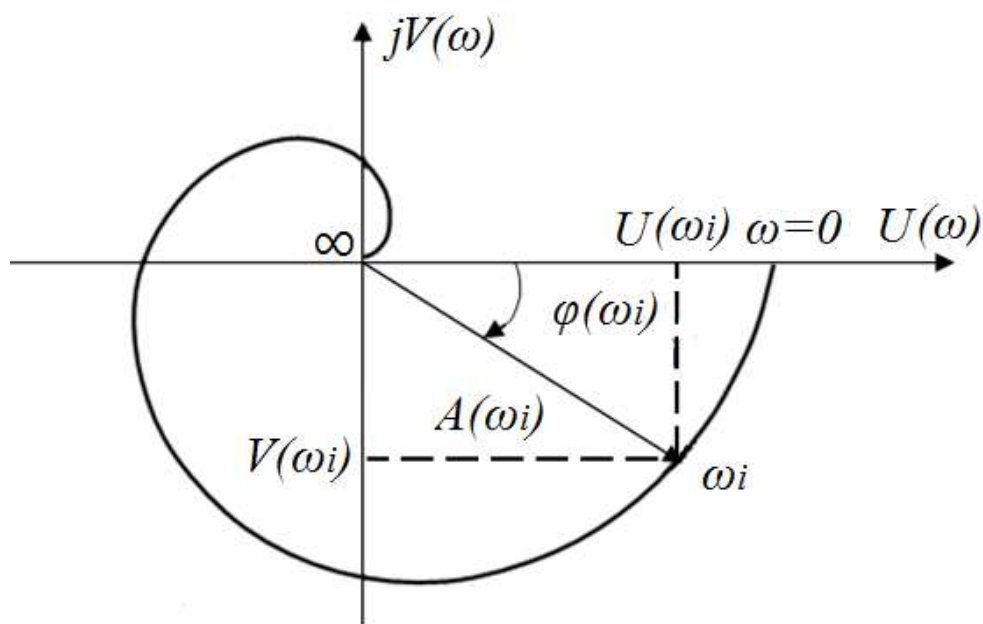


Рис. 2.1

Рассмотрим определение ЧХ на основе примера. Пусть ПФ равна

$$W(s) = \frac{k(b_1s + b_0)}{s(a_1s + a_0)}$$

Сделав подстановку  $s=j\omega$ , получим

$$W(s) = \frac{k(b_1j\omega + b_0)}{j\omega(a_1j\omega + a_0)}$$

из которой определим АЧХ и ФЧХ:

$$A(\omega) = \frac{k\sqrt{(b_1\omega)^2 + b_0^2}}{\omega\sqrt{(a_1\omega)^2 + a_0^2}},$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{b_1\omega}{b_0} - \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{a_1\omega}{a_0}.$$

Для вычисления ВЧХ и МЧХ целесообразно использовать очевидные зависимости (рис. 2.1):

$$U(\omega) = A(\omega)\cos\varphi(\omega), \quad (2.7)$$

$$V(\omega) = A(\omega)\sin\varphi(\omega), \quad (2.8)$$

Можно также воспользоваться прямым способом вычисления ВЧХ и МЧХ, который связан с непосредственным выделением в  $W(j\omega)$  мнимой и действительной частей. Для рассматриваемого примера данная процедура приведена ниже.

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{k(b_0 + jb_1\omega)}{j\omega(a_0 + ja_1\omega)} = \frac{-jk(b_0 + jb_1\omega)(a_0 - ja_1\omega)}{\omega(a_0 + ja_1\omega)(a_0 - ja_1\omega)} = \\ &= -jk \frac{b_0a_0 - jb_0a_1\omega + jb_0a_1\omega + b_1a_1\omega^2}{\omega(a_0^2 + a_1^2\omega^2)} = \\ &= -jk \frac{j(b_1a_0 - b_0a_1)\omega + b_0a_0 + b_1a_1\omega^2}{\omega(a_0^2 + a_1^2\omega^2)} = \\ &= k \frac{(b_1a_0 - b_0a_1)}{(a_0^2 + a_1^2\omega^2)} - jk \frac{b_0a_0 + b_1a_1\omega^2}{\omega(a_0^2 + a_1^2\omega^2)}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$U(\omega) = \frac{k(b_1a_0 - b_0a_1)}{\omega(a_0^2 + a_1^2\omega^2)}, \quad V(\omega) = \frac{k(b_0a_0 + b_1a_1\omega^2)}{\omega(a_0^2 + a_1^2\omega^2)}.$$

Используя  $U(\omega)$  и  $V(\omega)$ , можно также получить АЧХ и ФЧХ:

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}, \quad (2.9)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)}. \quad (2.10)$$

Анализ обоих способов вычисления  $U(\omega)$  и  $V(\omega)$  показывает, что прямой метод очень трудоёмок и не позволяет определить  $\varphi(\omega)$  за пределами диапазона  $0 \div 2\pi$ . Поэтому предпочтение отдается методике, основанной на предварительном определении АЧХ и ФЧХ с последующим применением соотношений (2.7), (2.8).

*Пример 2.2.* Получить АЧХ и ФЧХ для колебательного звена с передаточной функцией следующего вида:

$$W(s) = \frac{k}{T^2s^2 + 2qTs + 1},$$

где  $q$  – коэффициент демпфирования ( $q < 1$ ).



Определим сначала комплексную ПФ

$$W(j\omega) = \frac{k}{T^2 j\omega^2 + 2qTj\omega + 1},$$

а далее модуль  $A(\omega)$  и фазу  $\varphi(\omega)$ :

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2qT\omega)^2}},$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{2qT\omega}{1 - T^2\omega^2}.$$

Расчет и построение ЧХ является довольно трудоемкой процедурой, поэтому в инженерной практике для решения этой задачи обычно используется MatLab с её приложением Control System Toolbox [8]. Последнее содержит необходимые для построения частотных характеристик функции (*nyquist*, *margin* и др.). Исходными данными для них являются параметры ПФ звена или САУ в целом.

## 2.2. Ряды Фурье

### 2.2.1. Общие сведения о периодических функциях

В теории и практике автоматического управления часто встречаются процессы, которые можно рассматривать как периодические.

Функция называется периодической, если

$$f(t) = f(t + nT), \quad (2.11)$$

где  $T$  - период функции,  $n$  – целое число (1,2,3,...),  $t$  – время.

Для периодической функции  $f(t)$  интеграл на интервале  $T$  не меняется, т.е.

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_b^{b+T} f(t)dt, \quad (2.12)$$

где  $a, b$  – произвольные значения независимой переменной  $t$ .

Примером периодической функции может служить гармонический колебательный процесс, в частности, косинусоидальный (рис. 2.2):

$$f(t) = A \cos(\omega t - \varphi), \quad (2.13)$$

где  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  - угловая частота (рад/сек),  $\varphi$  - начальная фаза (рад).

Покажем справедливость соотношения (2.11) для функции (2.13):

$$A \cos \left[ \omega \left( t + n \frac{2\pi}{\omega} \right) - \varphi \right] = A \cos(\omega t - \varphi + 2\pi n) = A \cos(\omega t - \varphi).$$

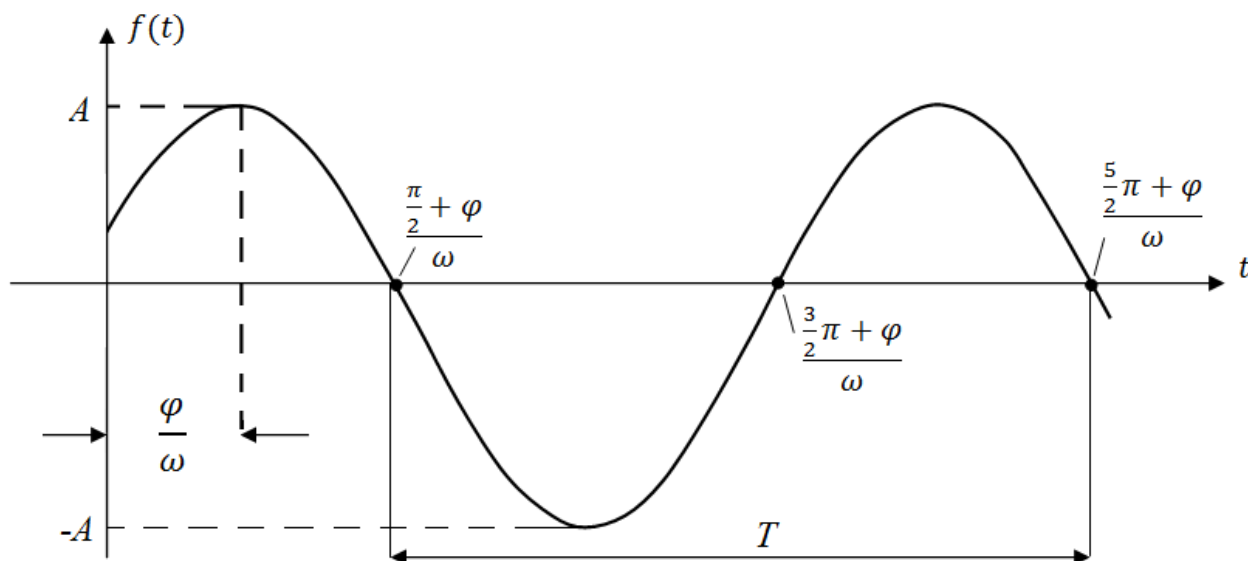


Рис. 2.2

Если сложить, например, три таких функции с частотами  $\omega, 2\omega, 3\omega$ , то получится периодическая функция с периодом первой гармоники  $T = 2\pi/\omega$ . График такой функции будет существенно отличаться от косинусоиды. Ещё более будет отличаться от гармонического процесса график функции

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t - \varphi_k), \quad (2.14)$$

где  $k$  – номер гармоники.

Функция (2.14) является также периодической функцией с периодом первой гармоники  $T$ . Соседние гармоники  $A_k \cos(k\omega t - \varphi_k)$  отличны друг от друга по частоте на величину  $\omega$ , т.е. первую гармонику можно принять за приращение и обозначить

$$\Delta\omega = \omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (2.15)$$

С учётом данного обозначения соотношение (2.14) можно переписать в виде ряда

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\Delta\omega t - \varphi_k), \quad (2.16)$$

где  $A_k \cos(k\Delta\omega t - \varphi_k)$  называется  $k$ -ой гармоникой с частотой  $k\Delta\omega$  и соответствующими амплитудой  $A_k$  и фазой  $\varphi_k$ .

Допуская существование “нулевой” гармоники ряд (2.16) можно записать в более общей форме

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\Delta\omega t - \varphi_k). \quad (2.17)$$

Учитывая, что

$$A_k \cos(k\Delta\omega t - \varphi_k) = A_k \cos k\Delta\omega t \cos \varphi_k + A_k \sin k\Delta\omega t \sin \varphi_k,$$

и обозначив

$$a_k = A_k \cos \varphi_k, \quad b_k = A_k \sin \varphi_k, \quad A_0 = \frac{a_0}{2},$$

получим тригонометрический ряд, который чаще называется рядом Фурье:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\Delta\omega t + b_k \sin k\Delta\omega t, \quad (2.18)$$

где коэффициенты  $a_0$ ,  $a_k$ ,  $b_k$  называются коэффициентами Фурье.

С учётом (2.15) ряд (2.18) можно записать в более общем виде

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos k \frac{2\pi}{T} t + b_k \sin k \frac{2\pi}{T} t \right). \quad (2.19)$$

### 2.2.2. Разложение периодической функции в ряд Фурье

Известно, что интеграл от произведения любых двух функций семейства

$$1, \cos \frac{2\pi}{T} t, \sin \frac{2\pi}{T} t, \cos 2 \frac{2\pi}{T} t, \sin 2 \frac{2\pi}{T} t, \dots, \cos m \frac{2\pi}{T} t, \sin m \frac{2\pi}{T} t, \dots$$

на интервале  $T$  равен нулю. Этот результат является следствием ортогональности данных функций. Данное свойство значительно облегчает определение коэффициентов  $a_k$  и  $b_k$  в разложении (2.19).

Определим сначала коэффициент  $a_0$ . Для этого проинтегрируем ряд (2.19) от  $-\frac{T}{2}$  до  $\frac{T}{2}$ :

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{a_0}{2} dt + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos k \frac{2\pi}{T} t + b_k \sin k \frac{2\pi}{T} t \right) \right) dt = \frac{a_0}{2} t \Bigg|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{a_0 T}{2}.$$

Отсюда

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt. \quad (2.20)$$

Далее найдём коэффициент  $a_k$ . Для этого умножим ряд (2.19) на  $\cos n \frac{2\pi}{T} t$  и проинтегрируем это соотношение от  $-\frac{T}{2}$  до  $\frac{T}{2}$ :

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n \frac{2\pi}{T} t dt &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{a_0}{2} \cos n \frac{2\pi}{T} t dt + \\ &+ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k \frac{2\pi}{T} t \cos n \frac{2\pi}{T} t \right) dt + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left( \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k \frac{2\pi}{T} t \cos n \frac{2\pi}{T} t \right) dt, \end{aligned}$$

или

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n \frac{2\pi}{T} t dt = a_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2 n \frac{2\pi}{T} t dt = a_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1 + \cos 2n \frac{2\pi}{T} t}{2} dt = \frac{a_n T}{2}.$$

Учитывая, что результат получен при произвольном  $n=k$ , имеем в общем случае:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k \frac{2\pi}{T} t dt, \quad k = 1, 2, 3 \dots \quad (2.21)$$

Аналогично, умножив ряд (2.19) на  $\sin n \frac{2\pi}{T} t$  и проинтегрировав его на интервале  $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$  определим:

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k \frac{2\pi}{T} t dt, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.22)$$

Таким образом, формулы (2.20) – (2.22) позволяют по заданной функции  $f(t)$  с периодом  $T$  найти коэффициенты разложения этой функции в ряд Фурье.

В частности, если функция  $f(t)$  чётная на интервале  $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ , то произведение  $f(t)\cos k\frac{2\pi}{T}t$  представляет собой чётную функцию, а  $f(t)\sin k\frac{2\pi}{T}t$  - нечётную функцию. В этом случае  $b_k = 0$ , а коэффициенты  $a_0$  и  $a_k$  можно определить по формулам:

$$a_0 = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt, \quad (2.23)$$

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k \frac{2\pi}{T} t dt, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.24)$$

Если функция  $f(t)$  нечётная на интервале  $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ , то произведение  $f(t)\cos kt$  является нечётной функцией, а произведение  $f(t)\sin kt$  - чётной функцией. Очевидно, что для такой функции  $a_0 = 0$ ,  $a_k = 0$ , а коэффициенты  $b_k$  могут быть определены по формуле:

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k \frac{2\pi}{T} t dt, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.25)$$

Следует отметить, что в полученных формулах для коэффициентов Фурье интегрирование производится в интервале  $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ . Однако результат интегрирования не изменится, если интегрирование осуществлять на другом интервале, например, на интервале  $(0, T)$ .

Зная коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$ , легко определить значения амплитуды  $A_k$  и начальной фазы  $\varphi_k$   $k$ -ой гармоники:

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \varphi_k = \arctg \frac{b_k}{a_k}.$$

*Пример 2.3.* Разложить на сумму гармонических составляющих “прямоугольную волну” (рис. 2.3), определяемую функцией

$$f(t) = \begin{cases} a, & \text{при } 0 < t \leq T/2 \\ -a, & \text{при } T/2 < t \leq T \end{cases}$$

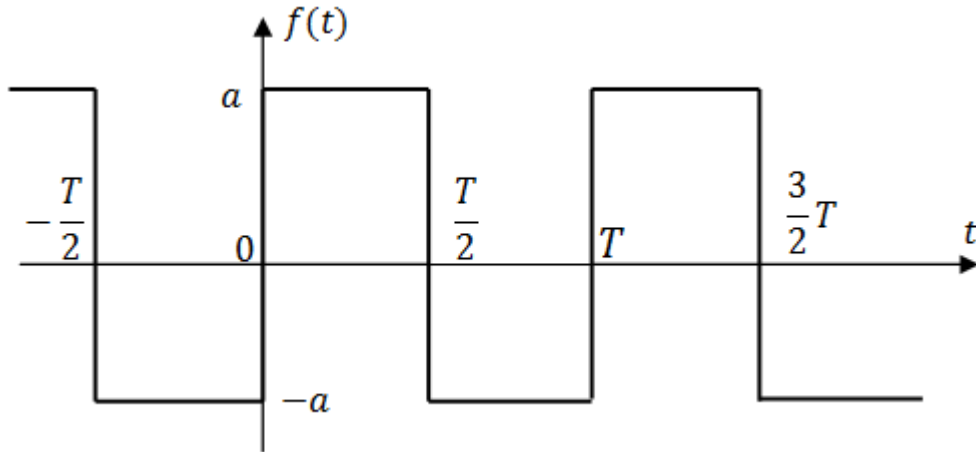


Рис. 2.3

Функция  $f(t)$  является нечётной, поэтому  $a_0 = 0$ ,  $a_k = 0$ . Коэффициенты  $b_k$  определяются по соотношению:

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} a \sin k \frac{2\pi}{T} t dt = \frac{4a}{2\pi k} \left( -\cos k \frac{2\pi}{T} t \right) \Big|_0^{T/2} = \frac{2a}{\pi k} (-\cos k \pi + 1)$$

$$= \frac{2a}{\pi k} [1 - (-1)^k] = \begin{cases} 0, & \text{при чётном } k; \\ \frac{4a}{\pi k}, & \text{при нечётном } k. \end{cases}$$

Отсюда разложение Фурье функции  $f(t)$  будет иметь следующий вид:

$$f(t) = \frac{4a}{\pi} \sin \frac{2\pi}{T} t + \frac{4a}{3\pi} \sin \frac{6\pi}{T} t + \frac{4a}{5\pi} \sin \frac{10\pi}{T} t + \dots$$

или

$$f(t) = \frac{4a}{\pi} \left( \sin \frac{2\pi}{T} t + \frac{1}{3} \sin \frac{6\pi}{T} t + \frac{1}{5} \sin \frac{10\pi}{T} t + \dots \right).$$

Анализ полученного ряда показывает, что разложение состоит из нечётных гармоник с частотами  $k\Delta\omega$ , где  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$ , и амплитудами  $A_k = \frac{4a}{\pi k}$ ,  $k = 1, 3, 5 \dots$ , а значения начальных фаз  $\varphi_k$  для всех гармоник равно  $\frac{\pi}{2}$ , т.к.

$$\varphi_k = \arctg \frac{b_k}{a_k} = \arctg \infty = \frac{\pi}{2}.$$

С учётом фазы  $\varphi_k$  получим следующий эквивалентный ряд Фурье вида (2.14):

$$f(t) = \frac{4a}{\pi} \left[ \cos \left( \frac{2\pi}{T} t - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{3} \cos \left( \frac{6\pi}{T} t - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{5} \cos \left( \frac{10\pi}{T} t - \frac{\pi}{2} \right) + \dots \right].$$

### 2.2.3. Разложение неперiodической функции

Пусть функция  $f(t)$  задана на конечном интервале  $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$  (рис. 2.4). Она не является периодической. Однако её можно представить приближённо в виде ряда Фурье, если сделать периодической путём соответствующего построения графика функции  $f(t)$  вне заданного интервала её определения (рис. 2.4).

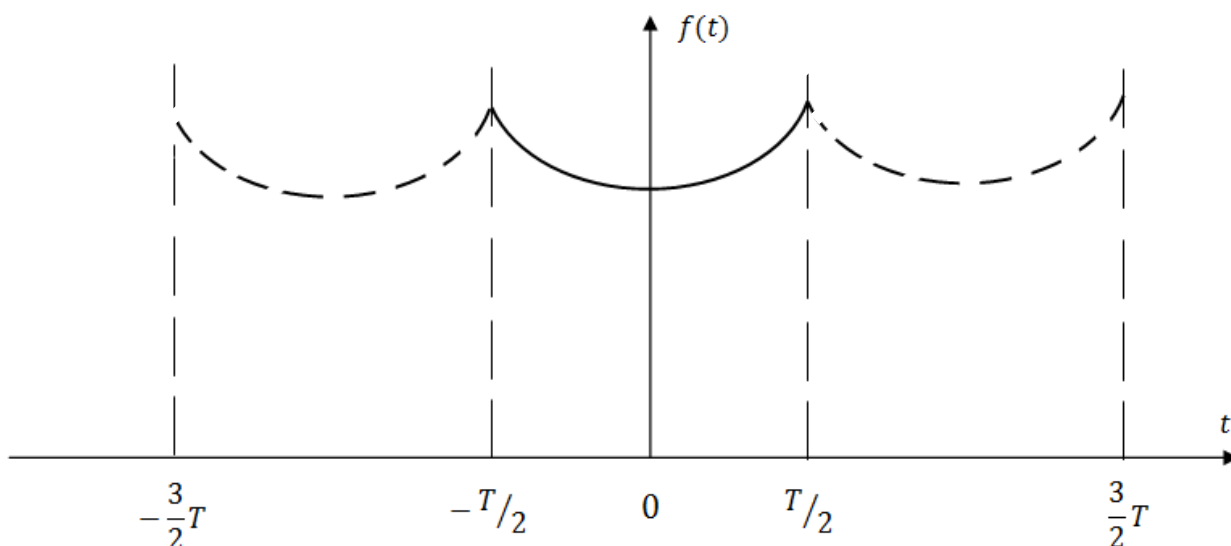


Рис. 2.4

В данном случае получена чётная периодическая функция. К ней применимы все соотношения для определения коэффициентов разложения Фурье.

*Пример 2.4.* Пусть задана функция  $f(t) = |t|$ . Очевидно, что эта функция не является периодической функцией на всей оси времени  $t$ , поэтому разложить её в ряд Фурье не представляется возможным. Однако если в конкретном случае представляет интерес её поведение на конечном интервале времени  $T$ , данную функцию можно разложить в тригонометрический ряд Фурье на интервале  $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ , сделав её искусственно периодической, путём соответствующего построения её графика (рис. 2.5) вне интервала  $T$ .

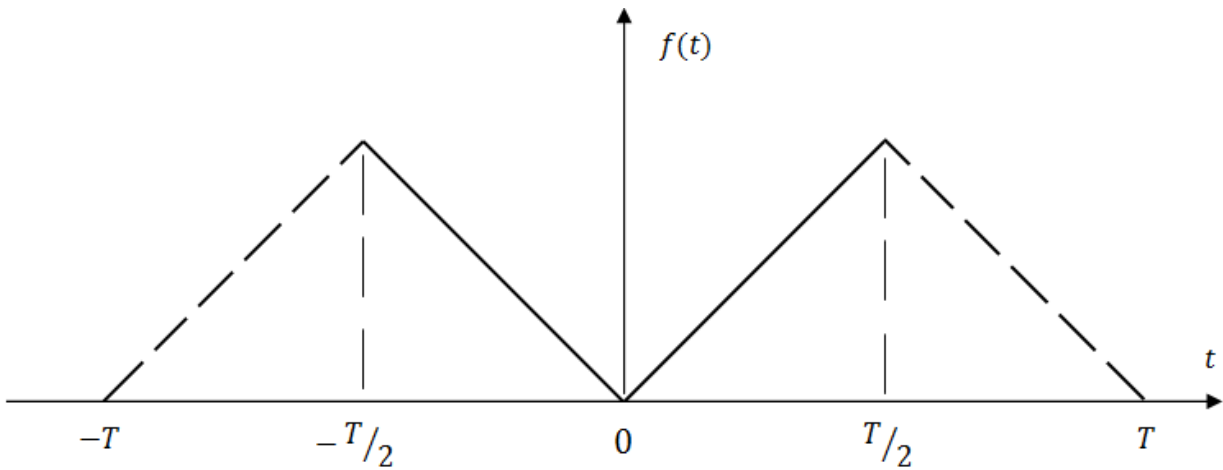


Рис. 2.5

Заданная функция  $f$  является чётной, поэтому  $b_k = 0$ . Коэффициенты  $a_0$  и  $a_k$  соответственно равны:

$$a_0 = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} t dt = \frac{4}{T} \frac{t^2}{2} \Big|_0^{T/2} = \frac{T}{2},$$

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} t \cos k \Delta \omega t dt = \frac{4}{T} \left[ \frac{1}{k \Delta \omega} \int_0^{T/2} t d(\sin k \Delta \omega t) = \right]$$

$$= \frac{4}{T k \Delta \omega} \left[ t \sin k \Delta \omega t \Big|_0^{T/2} - \int_0^{T/2} \sin k \Delta \omega t dt \right] =$$

$$= \frac{2}{k \pi} \left[ \frac{T}{2} \sin k \frac{2\pi}{T} \frac{T}{2} + \frac{1}{k \Delta \omega} \cos k \frac{2\pi}{T} t \Big|_0^{T/2} \right] =$$

$$= \frac{2}{k \pi} \left[ \frac{T}{k 2\pi} \left( \cos k \frac{2\pi}{T} \frac{T}{2} - 1 \right) \right] = \frac{T}{k^2 \pi^2} [(-1)^k - 1] = -\frac{2T}{k^2 \pi^2}, \quad k = 1, 3, 5 \dots$$

Таким образом, на интервале  $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$  получаем разложение

$$f(t) = |t| = \frac{T}{4} - \frac{2T}{\pi^2} \cos \frac{2\pi}{T} t - \frac{2T}{9\pi^2} \cos 3 \frac{2\pi}{T} t - \frac{2T}{25\pi^2} \cos 5 \frac{2\pi}{T} t - \dots =$$

$$= \frac{T}{4} - \frac{2T}{\pi^2} \left( \cos \frac{2\pi}{T} t + \frac{1}{9} \cos \frac{6\pi}{T} t + \frac{1}{25} \cos \frac{10\pi}{T} t + \dots \right).$$



Ещё раз следует отметить, что вне интервала  $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$  сумма ряда не будет совпадать с заданной функцией  $f(t)$ .

Рассмотрим далее случай, когда непериодическая функция  $f(t)$  задана на интервале  $(0, t)$ . Такую функцию можно продолжить периодически двумя путями: созданием чётной или нечётной периодических функций для выделенного интервала  $\left(0, \frac{T}{2}\right)$ . Рассмотрим эту процедуру на примере функции  $f(t) = t$  (рис. 2.6).

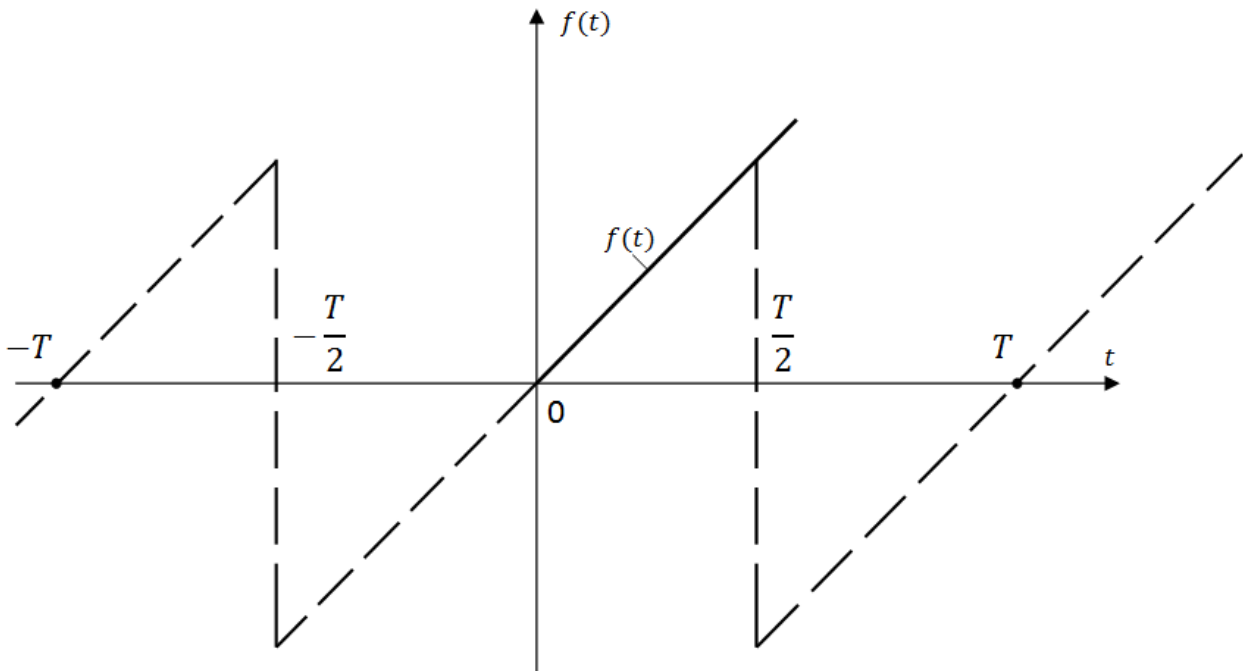


Рис. 2.6

Для решения поставленной задачи преобразуем эту функцию в нечётную периодическую функцию, как это показано на рис. 2.6. В этом случае  $a_0 = 0$ ,  $a_k = 0$  и соответственно имеем

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k \frac{2\pi}{T} t,$$

где

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} t \sin k \frac{2\pi}{T} t dt = \frac{4}{T k \frac{2\pi}{T}} \left[ -t \cos k \frac{2\pi}{T} t \Big|_0^{T/2} + \int_0^{T/2} \cos k \frac{2\pi}{T} t dt \right] = \\ &= \frac{2}{k\pi} \left[ -\frac{T}{2} \cos k \frac{2\pi}{T} \frac{T}{2} + \frac{T}{k2\pi} \sin k \frac{2\pi}{T} t \Big|_0^{T/2} \right] = \frac{2}{k\pi} \left[ -\frac{T}{2} \cos k\pi + \frac{T}{2k\pi} \sin k\pi \right] = \end{aligned}$$

$$= -\frac{T}{k\pi} \cos k\pi = -\frac{T}{k\pi} (-1)^k = \frac{T}{k\pi} (-1)^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

В итоге получим следующее разложение Фурье:

$$f(t) = t = \frac{T}{\pi} \sin \frac{2\pi}{T} t - \frac{T}{2\pi} \sin \frac{4\pi}{T} t + \frac{T}{3\pi} \sin \frac{6\pi}{T} t + \dots$$

Следует отметить, что для чётного продолжения функции  $f(t)$  будет получено другое выражение для  $f(t)$ . Однако для интервала  $(0, \frac{T}{2})$  численные расчёты дадут эквивалентные результаты.

#### 2.2.4. Частотные спектры периодической функции

Ранее было показано, как по коэффициентам  $a_k$  и  $b_k$  можно определить амплитуду  $A_k$  и фазу  $k$ -ой гармоники:

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad (2.26)$$

$$\varphi_k = \arctg \frac{b_k}{a_k}. \quad (2.27)$$

Совокупность коэффициентов  $a_k = a_k(k\Delta\omega)$  и  $b_k = b_k(k\Delta\omega)$  разложения Фурье называют частотными спектрами периодической функции, а совокупность величин  $A_k = A(k\Delta\omega)$  и  $\varphi_k = \varphi_k(k\Delta\omega)$  - соответственно амплитудным и фазовым частотными спектрами. Их удобно отображать графически в виде решетчатой функции, в которой расстояние между отдельными линиями спектра равно  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$ .

Следует отметить, что амплитудный частотный спектр (АЧС) является чётно-симметричной функцией, а фазовый частотный спектр (ФЧС) – нечётно-симметричной функцией частоты. Поэтому нет необходимости строить указанные спектры при отрицательных частотах.

*Пример 2.5.* Необходимо построить спектральные характеристики для функции  $f(t)$  типа “прямоугольная волна” из примера 2.4, где в результате решения было получено  $a_k = 0$ ,  $b_k = 0$  при чётном  $k$  и  $b_k = \frac{4a}{\pi k}$  - при нечётном  $k$ . Отсюда  $A_k = b_k$ ,  $\varphi_k = \frac{\pi}{2}$  (рис. 2.7).

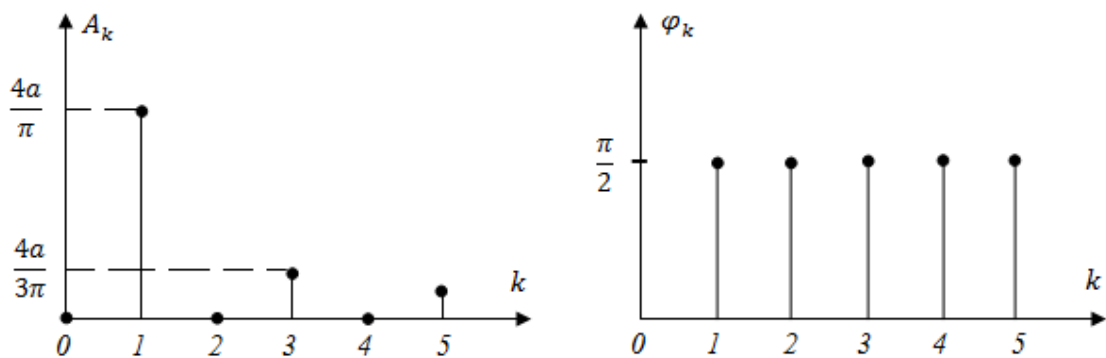


Рис. 2.7

Следует отметить, что периодические функции однозначно связаны со своими спектрами. Таким образом, имея частотные спектры можно указать какой функции он принадлежит. Благодаря этому при решении ряда задач в различных областях науки и техники представляется удобным операции над периодическими процессами заменять операциями над частотными спектрами. Спектры несут полную информацию о том, какие колебания присутствуют в исследуемом процессе и какова их мощность.

Рассмотрим пример определения рассеиваемой средней мощности на интервале  $0 < t < T$  в электрической цепи с сопротивлением  $R$ . Пусть  $f(t) = I(t)$ , где  $I(t)$  – ток в данной цепи. Мгновенная мощность, выделяемая током  $I(t)$ , равна  $P = I^2 R = f^2(t)R$ . Отсюда для средней мощности имеем:

$$P_{\text{cp}} = \frac{R}{T} \int_0^T I^2(t) dt . \quad (2.28)$$

Преобразуем правую часть (2.28), используя формулу Ляпунова [5]:

$$\frac{2}{T} \int_0^T f^2(t) dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2),$$

где  $a_k, b_k$  - коэффициенты разложения Фурье сигнала (тока)  $I(t)$ .

С учётом этого соотношения получим для средней мощности

$$P_{\text{cp}} = R \left[ \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right], \quad (2.29)$$

или

$$P_{\text{cp}} = R(A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2). \quad (2.30)$$

Правая часть соотношения (2.30) несёт информацию о распределении составляющих средней мощности по гармоникам. Совокупность значений  $RA_k^2$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) обычно называют энергетическим спектром. Из выражения (2.30) видно, что энергетический спектр определяется только амплитудным спектром  $I(t)$ , а фазовая составляющая разложения  $\varphi_k$  влияния на него не оказывает.

### Упражнения к главе 2

2.1. Определить АЧХ, ФЧХ, ВЧХ и МЧХ для динамических объектов, заданных следующими ПФ:

$$\text{а) } W(s) = \frac{k(T_3 s + 1)}{s(T_3 T_M s^2 + T_M s + 1)} ;$$

$$\text{б) } W(s) = \frac{k(T_3 s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} .$$

2.2. Разложить на сумму гармонических составляющих периодическую функцию, представленную на рис. 2.8

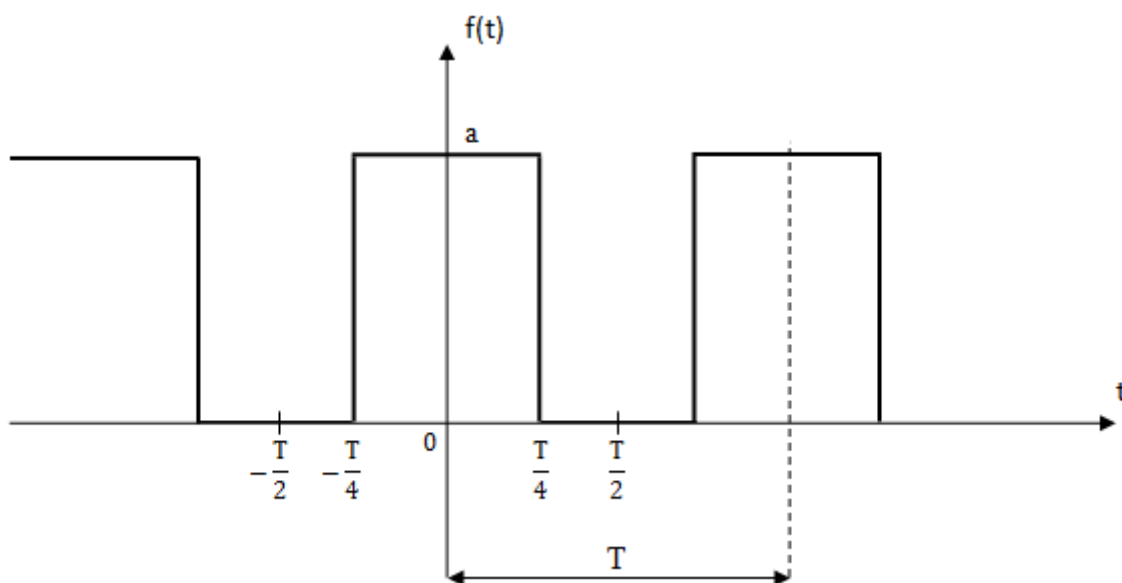


Рис. 2.8

2.3. Разложить в ряд Фурье неперiodическую функцию  $f(t) = t^2$  на интервале времени  $T$  (рис. 2.9)

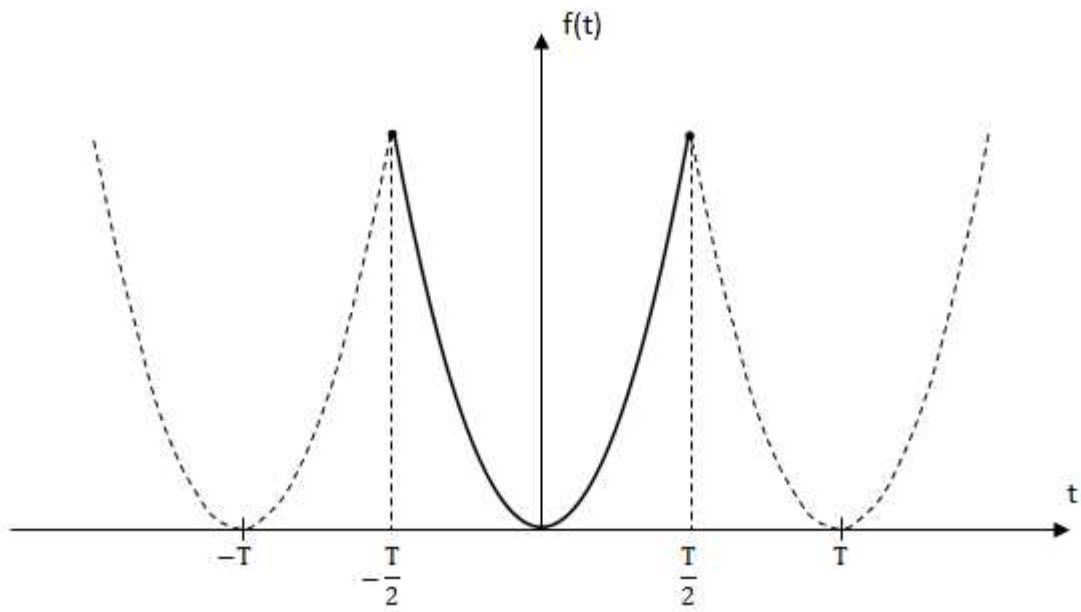


Рис. 2.9

2.4. Построить спектральные характеристики функций  $f(t)$  из упражнений 2.2 и 2.3 по результатам их разложения в ряд в Фурье.

## *Контрольные вопросы к главе 2*

- 2.1. Приведите выражения для прямого и обратного преобразования Фурье.
- 2.2. Поясните взаимосвязь преобразований Лапласа и Фурье.
- 2.3. Как получить комплексную передаточную функцию на основе ПФ динамической системы?
- 2.4. Как определить амплитудную частотную характеристику системы, если известна ее передаточная функция?
- 2.5. В каком режиме работы САУ определяются ее частотные характеристики?
- 2.6. Поясните методику вычисления фазовой частотной характеристики динамической системы по ее ПФ.
- 2.7. Как можно получить мнимую и вещественную частотные характеристики?
- 2.8. Поясните процедуру построения амплитудно-фазовой частотной характеристики.
- 2.9. Дайте определение периодической функции.
- 2.10. Приведите выражение тригонометрического ряда Фурье.
- 2.11. Поясните методику получения коэффициентов разложения Фурье периодической функции времени.
- 2.12. В чем заключается сущность разложения в ряд Фурье непериодической функции, заданной на некотором интервале времени?
- 2.13. Как отражается на значениях коэффициентов Фурье свойства четности и нечетности периодической функции?
- 2.14. Какими свойствами обладают амплитудный и фазовый частотные спектры?

## Глава 3. ЭЛЕМЕНТЫ МАТРИЧНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ И ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

### 3.1. Общие сведения о матрицах

#### 3.1.1. Основные понятия и определения

Матрицей называется прямоугольная таблица вида

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

где  $a_{ij}$  – элементы матрицы;  $i, j$  – соответственно номера строк и столбцов;  $m$  – число строк,  $n$  – число столбцов.

Иногда матрицу записывают в более компактной форме с указанием размерности:

$$A = [a_{ij}], \quad m \times n.$$

Элементами матриц являются обычно действительные и комплексные числа. Если  $m=n$ , то матрицу называют квадратной. При  $n=1$  матрица вырождается в вектор-столбец размерностью  $m \times 1$ , если  $m=1$ , то имеем вектор-строку размерностью  $1 \times n$ . Можно выделить ещё две специальные квадратные матрицы, которые довольно часто встречаются в современной теории автоматического управления:

- 1) диагональная матрица  $A$ , в которой  $a_{ii} \neq 0$ ,  $a_{ij} (i \neq j) = 0$ , т.е.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix};$$

- 2) единичная матрица  $I$  – частный случай диагональной матрицы, в которой  $a_{ii} = 1$ :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица в отличие от обычной прямоугольной таблицы подчиняется определённым правилам (операциям сравнения, транспонирования, сложения, умножения и др.).

### 3.1.2. Простейшие матричные операции

Определение равенства матриц сводится к сравнению их элементов. Две матрицы  $A$  и  $B$  одинаковой размерности равны, если выполняется условие  $a_{ij} = b_{ij}$ .

Операция транспонирования матрицы  $A$  обычно обозначается как  $A^T$  и осуществляется путём замены её строк на соответствующие столбцы, т.е. при  $A = [a_{ij}] (m \times n)$  имеем  $A^T = [a_{ji}] (n \times m)$ .

*Пример 3.1.* Осуществить транспонирование матрицы  $A$ .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ -3 & 1 & 6 \end{bmatrix}; \quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Операция сложения  $C = A + B$  применима для матриц одинаковой размерности в соответствии с правилом

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1 \div m, \quad j = 1 \div n.$$

Сложение матриц удовлетворяет условиям коммутативности и ассоциативности, т.е.

$$A + B = B + A, \quad A + (B + C) = (A + B) + C.$$

*Пример 3.2.* Вычислить сумму матриц.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 1 & 6 & -3 \end{bmatrix}.$$

Следует заметить, что операция вычитания матриц является по существу операцией сложения со знаком, поэтому специально не рассматривается.

Умножение матриц возможно, когда число столбцов множимого равно числу строк множителя, и осуществляется по следующему правилу:

$$C_{m \times n} = A_{m \times l} B_{l \times n} = [c_{ij}] = \left[ \sum_{k=1}^l a_{ik} b_{kj} \right],$$

где  $i = 1 \div m, \quad j = 1 \div n$ .

Операция умножения матриц ассоциативна, дистрибутивна, но в общем случае некоммутативна, т.е.



$A(BC) = (AB)C$  – ассоциативность,  
 $A(B + C) = AB + AC$  – дистрибутивность,  
 $AB \neq BA$ .

*Пример 3.3.* Найти произведение  $AB$  и  $BA$ :

$$\begin{aligned}
 AB &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \\
 BA &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \neq AB.
 \end{aligned}$$

Условие коммутативности выполняется в ряде частных случаев, например, при умножении исходной квадратной матрицы  $A$  слева или справа на единичную матрицу  $I$ :

$$AI = IA.$$

Умножение матрицы  $A$  на число  $\alpha$  осуществляется по правилу

$$C = A\alpha = \alpha A = [\alpha a_{ij}].$$

Имеется ещё одно полезное матричное соотношение, определяющее транспонирование произведения матриц:

$$(AB)^T = B^T A^T,$$

которое часто используется при преобразовании матричных уравнений в современной теории управления.

### 3.1.3. Определители

Определитель (детерминант) вводится только для квадратной матрицы и записывается в следующем виде:

$$\det A = \Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Порядок определителя матрицы равен числу её строк или столбцов.

Определитель – это число, равное сумме произведений элементов произвольной строки (или столбца) матрицы на их алгебраические дополнения:

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}, \quad (3.1).$$

Здесь  $A_{ij}$  – алгебраическое дополнение элемента  $a_{ij}$ , которое вычисляется по выражению

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|, \quad (3.2)$$

где  $|M_{ij}|$  – минор, который является новым определителем и получается из исходного определителя вычёркиванием строки и столбца, содержащих элемент  $a_{ij}$ .

Используя соотношения (3.1) и (3.2), разложение определителя можно довести до миноров второго порядка, которое легко вычисляется по следующему правилу:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = (b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}).$$

*Пример 3.4.* Разложение определителя третьего порядка по третьему столбцу:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 1 = -3.$$

Для матриц высокого порядка вычисление детерминанта представляет довольно трудоёмкую процедуру. Поэтому в настоящее время для этой цели обычно используют математически интегрированные среды, в частности, пакет MatLab, в которую встроена специальная функция  $det()$ .

Определители обладают рядом свойств [2]:

1. Значение определителя не изменится, если его строки (столбцы) поменять местами с соответствующими столбцами (строками), т.е. имеем  $|A| = |A^T|$ .
2. Знак определителя изменится на противоположный при перестановке местами двух столбцов или строк.
3. Если в определителе одна из строк (столбцов) является нулевой, то значение определителя равно нулю.
4. Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.
5. Если элементы какой-либо строки (столбца) определителя имеют одинаковый множитель, то его можно вынести за знак определителя.

6. Если к какой-либо строке (столбцу) определителя прибавить другую его строку (столбец), умноженную на некоторое число, то значение определителя не изменится.

7. Если все элементы двух строк или столбцов определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

8. Если элементы некоторой  $k$ -ой строки определителя являются суммами двух слагаемых, то определитель можно разложить сумму двух определителей в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} + c_{k1} & \dots & b_{kn} + c_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & \dots & b_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{k1} & \dots & c_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Это свойство позволяет разбивать определитель на несколько частных определителей с целью упрощения вычисления исходного определителя.

Можно привести ещё ряд полезных операций над определителями:

- производная по элементу  $a_{ij}$  равна алгебраическому дополнению  $A_{ij}$ :

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}} |A| = \frac{\partial}{\partial a_{ij}} \left( \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} \right) = A_{ij}.$$

- определитель произведения матриц  $AB$  равен произведению определителей этих матриц:  $|C| = |A||B|$ ;

### 3.1.4. Обращение матрицы

Обратная (инверсная) матрица  $A^{-1}$  удовлетворяет условию:  $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ . Её получение является одним из основных моментов при решении матричных уравнений. Пусть, например, дано уравнение

$$Ax = b, \tag{3.3}$$

где  $x$  – вектор вычисляемых координат;  $b$  – вектор-столбец вещественных чисел.

Решение получается умножением слева уравнения (3.3) на матрицу  $A^{-1}$ :

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

или, учитывая, что  $A^{-1}A = I$  имеем

$$x = A^{-1}b. \tag{3.4}$$

Обратная матрица находится по выражению

$$A^{-1} = \frac{AdjA}{|A|}, \quad |A| \neq 0, \quad (3.5)$$

где  $AdjA$  – присоединённая матрица, образованная из алгебраических дополнений  $A_{ji}$  (3.2):

$$AdjA = [A_{ji}]. \quad (3.6)$$

Из (3.6) следует, что присоединённая матрица является транспонированной для матрицы  $[A_{ij}]$ .

*Пример 3.5.* Определить обратную матрицу для заданной матрицы  $A$ :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad |A| = 1; \quad A_{11} = 2, \quad A_{12} = -1, \quad A_{21} = -3, \quad A_{22} = 2;$$

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}^T}{1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad A^{-1}A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Следует отметить, что для матриц высокого порядка операция обращения весьма затруднительна. Поэтому для решения этой задачи в настоящее время используют машинные методы вычисления обратных матриц. В частности, в среду MatLab для этой цели встроена функция  $inv()$ .

Единственным требованием для возможности выполнения операции обращения матрицы является условие невырожденности матрицы, которое следует из (3.5):

$$\Delta = |A| \neq 0. \quad (3.7)$$

Для проверки этого условия осуществляют вычисление так называемого ранга матрицы  $A$ . Ранг равен наибольшему числу линейно независимых строк (или столбцов). Он определяется по минорам: если какой-либо минор порядка  $r$  матрицы  $A$  не равен нулю, а все миноры, начиная с порядка  $r+1$ , равны нулю, то число  $r$  называется рангом матрицы:

$$r = \text{rang } A.$$

Очевидно, что ранг квадратной матрицы, определитель которой не равен нулю, равен её размеру, т.е.  $r = n$ .

Вычисление ранга также довольно трудоёмкая процедура, поэтому для оценки невырожденности матрицы в настоящее время используют программные продукты. В частности, в MatLab для решения этой задачи применяется функция  $rank()$ , результат выполнения которой затем сравнивается с порядком  $n$  матрицы  $A$  с целью проверки условия  $r = n$ .

Представляет также интерес операция обращения произведения матриц. Она подобна рассмотренной выше операции транспонирования произведения

двух матриц. Пусть  $C = AB$ , тогда умножив слева это равенство на  $A^{-1}$ , получим  $A^{-1}C = B$ ; далее аналогично  $A^{-1} = BC^{-1}$  и соответственно  $B^{-1}A^{-1} = C^{-1}$ . Таким образом, имеем

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}. \quad (3.8)$$

Это соотношение часто используется в математических преобразованиях в современной теории управления, которая базируется на применении матричных методов анализа и синтеза автоматических систем.

## 3.2. Векторы и линейные пространства

### 3.2.1. Векторы

Ранее было дано определение вектору как матрице размером  $n \times 1$  – вектор-столбец  $x$  и как матрице размером  $1 \times n$  – вектор-строка  $x^T$ , где  $n$  – размерность вектора. Если  $n=3$ , то вектору можно дать геометрическую интерпретацию в трёхмерном пространстве, если  $n > 3$ , то геометрическое представление утрачивает свой смысл, однако терминология, связанная с привычными координатными системами, оказывается весьма полезной. Например, система координат с единичными векторами

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

может воображаться в виде  $n$ -мерной системы с взаимно ортогональными координатными осями.

Над векторами можно осуществлять ряд характерных для них операций и преобразований. Будем рассматривать далее только действительные векторы.

*Скалярное произведение* двух векторов  $x$  и  $y$  записывается и определяется как

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = x^T y = y^T x = (y, x).$$

Скалярное произведение используется часто для проверки ортогональности векторов: два вектора  $x$  и  $y$  называются ортогональными, если  $(y, x) = (x, y) = 0$ .

Например, для векторов

$$x = [1 \ 0 \ 0]^T, \quad y = [0 \ 1 \ 0]^T \text{ получим } (x, y) = x^T y \\ = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0.$$

Внешнее произведение осуществляется согласно правилу

$$xy^T = \begin{bmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \dots & x_1 y_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \dots & x_n y_m \end{bmatrix}.$$

где  $x, y$  – соответственно векторы с размерностью  $n \times 1$  и  $m \times 1$ .

Эта операция встречается очень редко, обычно при преобразовании некоторых векторно-матричных соотношений.

Довольно часто требуется оценить длину вектора  $x$ . Она получила название *нормы*  $\|x\|$ , которая определяется как квадратный корень от скалярного произведения векторов  $x$  и  $x$ :

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Следствием этого выражения является два соотношения:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ - неравенство треугольника;}$$

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \text{ - неравенство Шварца.}$$

Вектор называется *единичным* или *нормированным*, если его длина равна единице, т.е.  $(x, x) = 1$ . Операция нормирования осуществляется делением вектора на его норму:

$$\bar{x} = \frac{x}{\|x\|} = \frac{x}{\sqrt{(x, x)}}$$

*Пример 3.6.* Произвести нормирование вектора  $x = [1 \ 2 \ 2]^T$ .

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3, \quad \bar{x} = \frac{x}{3} = \left[ \frac{1}{3} \ \frac{2}{3} \ \frac{2}{3} \right]^T.$$

Проверка нормированности вектора  $x$ :

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = 1.$$

Очень важным свойством векторов является их *линейная независимость*. Векторы  $x_i, i = 1 \div m$  называются *линейно зависимыми*, если выполняется равенство

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m = 0,$$

где  $\alpha_i$  – числа, среди которых по крайней мере одно число не равно нулю.

Если это равенство справедливо только при всех  $\alpha_i = 0$ , то такая система векторов является линейно независимой.

Для оценки линейной независимости векторов вычисляется определитель матрицы, составленный из векторов  $x_i$  в следующей форме:

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Необходимым и достаточным условием линейной независимости векторов  $x_i$  является равенство ранга матрицы  $A$  величине  $n$ .

*Пример 3.7.* Оценить свойство линейной независимости системы векторов

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Построим и вычислим определитель матрицы  $A$  (3.9):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 - 1 - 1 = 3 \neq 0.$$

Таким образом, заданная система векторов линейно независима, т.к. ранг матрицы  $r = n = 3$ .

### 3.2.2. Линейное векторное пространство

Линейное векторное пространство  $V$  - это множество векторов, которые удовлетворяют двум условиям:

- сумма двух произвольных векторов  $x$  и  $y$  из множества  $V$  также является вектором, принадлежащим этому множеству;

- вектор, полученный умножением вектора из множества  $V$  на любой скаляр  $\lambda$ , также принадлежит этому множеству.

При этом правила сложения векторов и умножения их на скаляр обладают следующими свойствами:

- 1)  $x + y = y + x$  (коммутативность);
- 2)  $(x + y) + z = x + (y + z)$  (ассоциативность);
- 3)  $x + 0 = x$ , где  $0$  – нулевой вектор;
- 4) для любого вектора  $x$  существует такой вектор  $y$ , что  $x + y = 0$ , где вектор  $y = -x$  называют обратным вектору  $x$ ;
- 5)  $1 \cdot x = x$  для любого  $x$ ;

- 6)  $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x = \beta(\alpha x)$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  – скаляры;
- 7)  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ ;
- 8)  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ .

Наиболее простым примером линейного векторного пространства является множество векторов, принадлежащее трёхмерному Евклидову пространству.

Если системы векторов  $x_1, x_2, \dots, x_m$  принадлежит пространству  $V$ , то множество векторов  $y$ , являющихся линейной комбинацией этих векторов, т.е.

$$y = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_m x_m \quad (3.10)$$

также образует векторное пространство. Размерность этого пространства равна числу его линейно независимых векторов.

Если только  $r$  векторов  $x_i$  в уравнении (3.10) является линейно независимыми, то размерность пространства, которое можно образовать этими векторами, равна  $r$  – рангу системы векторов  $x_i$ .

Например, имеется система векторов

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Эти векторы линейно зависимы, т.к.  $x_1 = x_2 + x_3$ . В этом случае вектор  $y$  равен:

$$y = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 = k_1(x_2 + x_3) + k_2 x_2 + k_3 x_3 = (k_1 + k_2)x_2 + (k_1 + k_3)x_3,$$

т.е. размерность векторного пространства равна двум ( $r = 2$ ).

Если в  $n$ -мерном пространстве  $r=n$ , то систему  $n$  линейно независимых векторов называют часто линейной оболочкой. Её можно использовать в качестве базиса векторного пространства.

*Базисом* пространства называется такая система векторов, через которую единственным образом выражается произвольный вектор данного пространства. Базис, по существу, представляет систему координат.

Если заданы составляющие вектора  $y$ , то необходимо также указать базис или систему координат, по отношению к которой указаны эти составляющие. Например, расположение точки в трёхмерном пространстве может задаваться в прямоугольной системе координат, цилиндрической системе координат, сферической системе координат и т.д. Утверждение, что вектор

$$y = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$



имеет составляющие 2, 0, 3 не имеет смысла, если не указан базис векторного пространства.

*Пример 3.8.* В ортогональном базисе  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  заданы три вектора  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , приведённые в примере 3.7. Необходимо представить в этом базисе вектор

$$y = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3.$$

Следует сначала отметить, что если векторы  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  взять за базис, то вектор  $y$  будет иметь следующий вид

$$y = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}.$$

В заданном ортогональном базисе имеем:

$$y = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_3 \\ 3k_1 + 2k_2 + k_3 \\ 2k_1 + 3k_2 + k_3 \end{bmatrix}.$$

Результирующий вектор представлен на рис. 3.1.

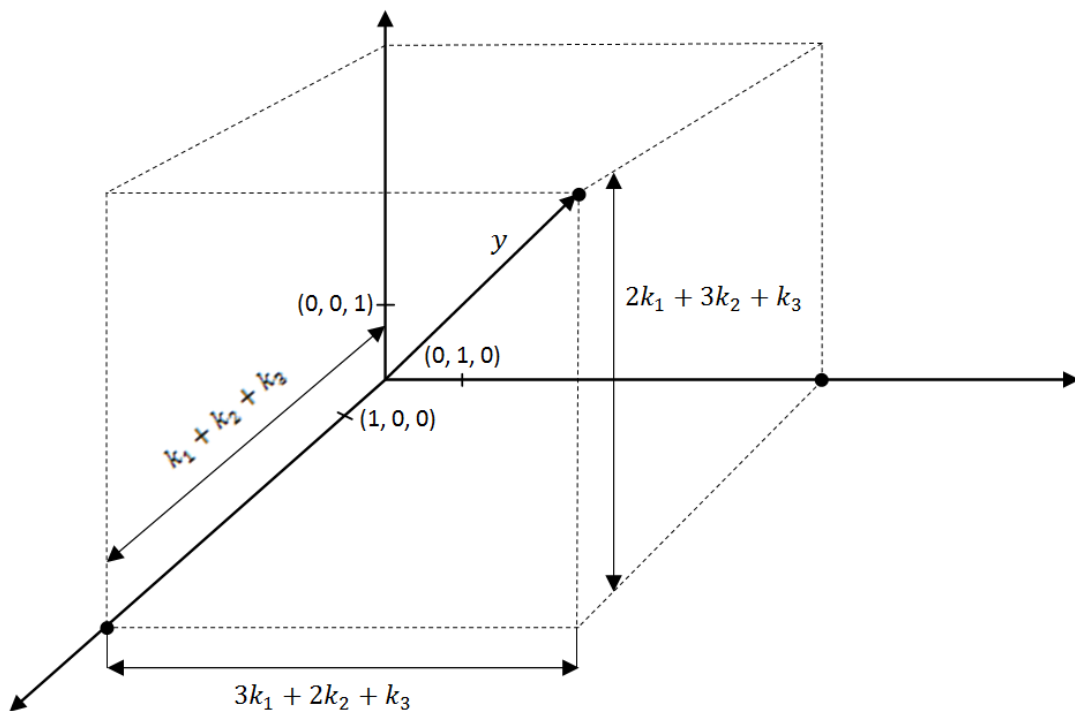


Рис. 3.1

Наиболее удобна в использовании ортогональная система векторов. Поэтому задача ортогонализации произвольной системы векторов является востребованной. Для её решения целесообразно применить метод Грамма – Шмидта, который определяется следующими соотношениями:

$$y_1 = x_1, \\ y_j = x_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(y_i, x_j)}{(y_i, y_i)} y_i, \quad j = 2, 3, \dots, n, \quad (3.11)$$

где  $x_j$  – исходное множество векторов;  $y_j$  – ортогональная система векторов.

При необходимости полученную систему векторов  $y$  можно нормировать, используя выражение

$$\bar{y}_i = \frac{y_i}{\|y_i\|}, \quad i = 1 \div n.$$

В результате будет построена ортонормированная система векторов  $y$ .

*Пример 3.9.* Построить ортонормированную систему векторов  $y$  на основе системы векторов  $x$ :

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Согласно методике Грамма – Шмидта для  $y_1$  имеем:

$$y_1 = x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Далее получим векторы  $y_2$  и  $y_3$ , используя соотношение (3.11):

$$y_2 = x_2 - \frac{(y_1, x_2)}{(y_1, y_1)} y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{[1 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\bar{y}_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} = \frac{y_2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$y_3 = x_3 - \frac{(y_1, x_3)}{(y_1, y_1)} y_1 - \frac{(y_2, x_3)}{(y_2, y_2)} y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{[1, 1, 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{[-1, 0, 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5 \\ 1 \\ -0,5 \end{bmatrix}; \quad \bar{y}_3 = \frac{y_3}{\|y_3\|} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} -0,5 \\ 1 \\ -0,5 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, ортонормированный базис равен

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

### 3.2.3. Линейные преобразования в линейных пространствах

Пусть имеется линейное  $n$ -мерное пространство  $V_n$  и квадратная матрица  $A (n \times n)$ , которая осуществляет преобразование вектора  $x$  в вектор  $y$  в соответствии с выражением:

$$y = Ax. \quad (3.12)$$

Обычно в этом соотношении вектор  $x$  называют прообразом, вектор  $y$  – образом вектора  $x$ , а матрица  $A$  трактуется как матрица линейного преобразования.

Если в некотором базисе заданы два линейных преобразования матрицами  $y = Ax$  и  $z = By$ , то получим

$$z = B(Ax) = BAx = Cx, \quad (3.13)$$

где  $C = BA$  – матрица произведения линейных преобразований.

Суммой линейных преобразований, задаваемых матрицами  $A$  и  $B$ , называется линейное преобразование вида

$$y = Ax + Bx = (A + B)x. \quad (3.14)$$

Очевидно, правила преобразований (3.13), (3.14) можно распространить на произвольное количество преобразований в линейном пространстве.

Наиболее часто в современной теории управления используется так называемое преобразование подобия. Пусть в уравнении (3.12) векторы  $x$  и  $y$  определяются в  $n$ -мерном пространстве с некоторым базисом. Требуется перейти от данного базиса к новому базису, в котором исходные векторы  $x$  и  $y$  однозначно определяются как  $x_0$  и  $y_0$  следующими соотношениями:

$$x = Tx_0, \quad y = Ty_0, \quad (3.15)$$

где  $T$  – матрица преобразования.

Эта матрица должна быть невырожденной, т.к. в дальнейшем потребуется выполнять операцию обращения  $T^{-1}$ .

Поставив (3.15) в (3.12), получим

$$Ty_0 = ATx_0$$

или, умножив слева обе части выражения на  $T^{-1}$ , определим

$$y_0 = T^{-1}ATx_0 = Qx_0, \quad (3.16)$$

где  $Q = T^{-1}AT$  - матрица подобия, связывающая рассматриваемые векторы в новой системе координат.

В задачах линейного преобразования в линейных пространствах особое внимание уделяется так называемым собственным значениям матриц преобразования, которые часто называют *характеристическими числами*, а собственные векторы – характеристическими векторами. Это очень важные понятия, т.к. собственные значения системы определяют её динамические свойства (устойчивость, быстродействие и др.).

Для введения указанных определений обратимся к векторно-матричному уравнению (3.12). Поставим вопрос, существует ли вектор  $y$ , который имеет такое же направление в векторном пространстве, как и вектор  $x$ . Если такой вектор существует, то  $y$  должен быть пропорционален  $x$ , т.е.

$$y = Ax = \lambda x, \quad (3.17)$$

где  $\lambda$  - коэффициент пропорциональности (скаляр).

Эта задача известна как задача о характеристических числах. Значение  $\lambda = \lambda_i$ , для которого уравнение (3.17) имеет решение  $x_i \neq 0$ , называется характеристическим числом матрицы преобразования  $A$ , а соответствующий вектор решения  $x_i$  называется собственным (характеристическим) вектором матрицы  $A$ .

Соотношение (3.17) можно переписать в виде однородного уравнения

$$[\lambda I - A]x = 0. \quad (3.18)$$

Данное уравнение имеет решение только в том случае, когда

$$|\lambda I - A| = 0. \quad (3.19)$$

Если раскрыть определитель, то получим так называемое характеристическое уравнение

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \quad (3.20)$$

Его корни равны собственным значениям матрицы  $A$ . Они могут быть как действительными, так и комплексными.

Коэффициенты характеристического уравнения  $a_1$  и  $a_n$  представляют особый интерес. С целью их оценки перепишем (3.20) в виде произведения сомножителей

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) \quad (3.21)$$

и подставим значение  $\lambda = 0$ . В итоге получим

$$P(0) = (-1)^n \prod_{i=1}^n \lambda_i = (-1)^n |A| = a_n, \quad (3.22)$$

т.е. произведение характеристических чисел равно определителю матрицы  $A$ . Коэффициент  $a_1$  можно получить, раскрывая (3.21) и определитель (3.19) и далее приравнивая коэффициенты характеристических уравнений при  $\lambda^{n-1}$ :

$$a_1 = (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii}, \quad (3.23)$$

т.е. сумма собственных значений квадратной матрицы равна сумме её диагональных элементов. Последняя получила название *следа* матрицы:

$$\text{tr}A = \text{tr}[a_{ij}] = \sum_{i=1}^n a_{ii}. \quad (3.24)$$

Покажем справедливость соотношений (3.22) и (3.23) на основе примера квадратной матрицы  $A$  размером  $2 \times 2$ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{21}a_{12} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0.$$

С другой стороны

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 = 0.$$

Отсюда

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22} = \text{tr}A \text{ и } \lambda_1\lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = |A|.$$

Понятие следа матрицы использовано в алгоритме Бохера, который применяют для получения коэффициентов характеристического уравнения (3.20). Обозначив след матрицы  $A^k$  как  $T_k = \text{tr}A^k$ , алгоритм Бохера можно представить в виде следующей итерационной процедуры:

$$a_i = -\frac{1}{i} \sum_{k=0}^{i-1} a_k T_{i-k}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad a_0 = 1, \quad (3.25)$$

или в развёрнутой форме:

$$a_1 = -T_1,$$

$$a_2 = -\frac{1}{2}(a_1 T_1 + T_2),$$

$$a_3 = -\frac{1}{3}(a_2 T_1 + a_1 T_2 + T_3),$$

.....

$$a_n = -\frac{1}{n}(a_{n-1} T_1 + a_{n-2} T_2 + \dots + a_1 T_{n-1} + T_n).$$

Пример 3.10. Найти характеристическое уравнение матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Использование алгоритма (3.25) при  $n = 3$  требует вычисления трёх следов:

$$T_1 = \text{tr}A = 2,$$

$$T_2 = \text{tr}A^2 = \text{tr} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix} = 14,$$

$$T_3 = \text{tr}A^3 = \text{tr} \begin{bmatrix} 14 & -4 & 17 \\ 13 & 3 & 11 \\ 13 & 11 & 3 \end{bmatrix} = 20.$$

Далее в соответствии с формулой Бохера имеем:

$$a_1 = -T_1 = -2, \quad a_2 = -\frac{1}{2}(-2T_1 + T_2) = -5, \quad a_3 = -\frac{1}{3}(-5T_1 - 2T_2 + T_3) = 6.$$

Отсюда характеристическое уравнение равно:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Матрица  $T$  определяет вид преобразования (3.16). Наибольший интерес представляет задача получения матрицы  $Q$  в диагональной форме. Для её решения требуется определить так называемую модальную матрицу  $M$ . Она составляется из собственных векторов  $x_i$ , которые являются решениями системы уравнений

$$[\lambda_i I - A]x_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.26)$$

Так как уравнение (3.26) однородное, то  $k_i x_i$ , где  $k_i$  — произвольная скалярная величина, также является решением этого уравнения. Поэтому уравнение (3.26) определяет однозначно лишь направление каждого из  $x_i$ . При различных характеристических числах столбцы модальной матрицы могут выбираться равными или пропорциональными произвольному столбцу  $\text{Adj}[\lambda_i I - A]$ . Это базируется на том факте, что матрица  $[\lambda_i I - A]$  имеет ранг  $n-1$ , что следует из (3.19). В виду линейной зависимости столбцов  $\text{Adj}[\lambda_i I - A]$  для конкретного  $\lambda_i$ , выбор каждого  $\lambda_i$  определяет только один столбец модальной матрицы.

Полученная таким образом матрица  $M$  является искомой матрицей преобразования, т.е.  $T = M$ .

Пример 3.11. Осуществить диагонализацию матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Определим характеристическое уравнение

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = 0 = \lambda(\lambda + 3) + 2 = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0,$$

из которого получим собственные числа  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -2$ .

Присоединённая матрица равна

$$\text{Adj}[\lambda I - A] = \text{Adj} \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 3 & 1 \\ -2 & \lambda \end{bmatrix} = B.$$

При  $\lambda_1 = -1$  и  $\lambda_2 = -2$  присоединённые матрицы соответственно равны

$$B_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Отсюда векторы  $x_1$  и  $x_2$  и составленная из них модальная матрица  $M$  соответственно равны:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad M = [x_1, x_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Полагая  $T = M$ , определим сначала  $T^{-1}$ , а затем искомую матрицу подобия  $Q = T^{-1}AT$ :

$$|T| = -1, \quad T^{-1} = \frac{1}{|T|} \text{Adj}T = - \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$Q = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Рассмотренное преобразование подобия позволяет значительно упростить анализ линейных систем за счёт развязки координат системы. В частности, при введении преобразования

$$x = Mq, \tag{3.27}$$

где  $M$  – модальная матрица,

уравнение (3.12) будет иметь следующий вид:

$$y = AMq$$

или после умножения слева на  $M^{-1}$

$$M^{-1}y = M^{-1}AMq = \Lambda q, \tag{3.28}$$

где  $\Lambda = M^{-1}AM$  – диагональная матрица.

Положим

$$z = M^{-1}y, \tag{3.29}$$

и перепишем уравнение (3.28) в более компактном виде:

$$z = \Lambda q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} q. \tag{3.30}$$

Так как диагональ матрицы  $\Lambda$  состоит из собственных чисел, соотношение (3.30) можно представить в виде системы уравнений:

$$\begin{aligned} z_1 &= \lambda_1 q_1, \\ z_2 &= \lambda_2 q_2, \\ &\dots\dots\dots \\ z_n &= \lambda_n q_n, \end{aligned}$$

где  $q_i$  ( $i = 1 \div n$ ) – новая система координат, которую часто называют *нормальной* системой координат.

В результате данного преобразования каждая координата  $z_i$  определяется однозначно соответствующей координатой  $q_i$  и характеристическим числом  $\lambda_i$ . В теории управления это приём преобразования называют развязкой координат.

### Упражнения к главе 3

3.1. Определить обратную матрицу для матрицы  $A$ :

$$\begin{aligned} \text{а) } A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -4 & 1 & 5 \end{bmatrix}, & \text{б) } A &= \begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}; \\ \text{в) } A &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 4 \end{bmatrix}; & \text{г) } A &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3.2. Для заданных векторов  $x$  и  $y$ :

$$x^T = [1, 2, 3], \quad y^T = [-5, 3, -1]$$

- а) определить произведения векторов  $x^T y$  и  $x y^T$ ;
- б) получить вектор  $z = x + y$  и вычислить его длину;
- в) осуществить нормирование векторов  $x$  и  $y$ .

3.3. Построить ортонормированную систему векторов  $y_1, y_2, y_3$  на основе векторов  $x_1, x_2, x_3$ :

$$x_1^T = [2, 1, 3], \quad x_2^T = [5, 2, 3], \quad x_3^T = [3, 4, 1].$$

3.4. Определить характеристическое уравнение для матрицы  $A$ :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{c_M}{J} & 0 \\ -\frac{c_E}{T_\Theta R_\text{я}} & -\frac{1}{T_\Theta} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$



3.5. С помощью алгоритма Бохера определить характеристический полином матрицы  $A$ :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

3.6. Осуществить диагонализацию матрицы  $A$ :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

### *Контрольные вопросы к главе 3*

- 3.1. В чем заключается операция транспонирования матрицы?
- 3.2. Дайте определение определителю.
- 3.3. Что такое алгебраическое дополнение?
- 3.4. Приведите выражение для получения обратной матрицы.
- 3.5. Какая матрица называется присоединенной?
- 3.6. В чем заключается свойство невырожденности матрицы?
- 3.7. Что такое ранг матрицы?
- 3.8. Приведите соотношение, связывающее обращение произведения двух матриц с их обратными матрицами.
- 3.9. Дайте определение вектор-строке и вектор-столбцу.
- 3.10. В чем заключается отличие скалярного и внешнего произведений векторов?
- 3.11. Приведите соотношение для определения длины вектора.
- 3.12. В чем заключается операция нормирования вектора?
- 3.13. Дайте определение линейной независимости векторов?
- 3.14. Как определяется размерность векторного пространства?
- 3.15. Что называется базисом векторного пространства?
- 3.16. В чем заключается сущность преобразования подобия?
- 3.17. Что такое характеристические числа и собственные векторы?
- 3.18. Как определить след матрицы?
- 3.19. Как записать характеристическое уравнение для матрицы, если известны ее собственные числа?
- 3.20. Приведите выражение характеристического уравнения в матричной форме.

**Глава 4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ  
УПРАВЛЕНИЯ**

**4.1. Математические модели динамических систем  
в пространстве состояний**

*4.1.1. Общие сведения о методе пространства состояний*

В теории и практике автоматического управления используются следующие математические модели динамических объектов и систем:

- дифференциальные уравнения;
- передаточные функции и связанные с ними частотные характеристики;
- векторно-матричные уравнения, лежащие в основе метода переменных состояния, который положил начало современной теории управления.

Первые две формы математических моделей используются в классической теории автоматического регулирования. Они связаны как было показано ранее с преобразованиями Лапласа и Фурье. К недостаткам этих моделей можно отнести трудности, возникающие при описании многомерных автоматических систем, т.е. САУ со многими входными воздействиями и выходными координатами, а также сложность учёта ненулевых начальных условий.

Метод пространства состояний (МПС) свободен от этих недостатков. Для описания движения САУ он предполагает использование системы дифференциальных уравнений первого порядка в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \dots + b_{1m}u_m, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \dots + b_{2m}u_m, \\ &\dots \dots \dots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \dots + b_{nm}u_m, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n + d_{11}u_1 + d_{12}u_2 + \dots + d_{1m}u_m, \\ y_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n + d_{21}u_1 + d_{22}u_2 + \dots + d_{2m}u_m, \\ &\dots \dots \dots \\ y_r &= c_{r1}x_1 + c_{r2}x_2 + \dots + c_{rn}x_n + d_{r1}u_1 + d_{r2}u_2 + \dots + d_{rm}u_m \end{aligned}$$

или в матричной форме

$$\dot{X} = AX + BU, \tag{4.1}$$

$$Y = CX + DU, \tag{4.2}$$

где  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  - вектор переменных состояния;

$U = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T$  - вектор входных воздействий;

$Y = [y_1, y_2, \dots, y_r]^T$  - вектор выходных координат;

$\dot{X}$  - первая производная вектора  $X$ ;

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$  - матрица состояния системы;

$B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}$  - матрица входа;

$C = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{r1} & \dots & c_{rn} \end{bmatrix}$  - матрица выхода;

$D = \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & d_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{r1} & \dots & d_{rm} \end{bmatrix}$  - матрица обхода.

Система уравнений (4.1) ÷ (4.2) называется стандартной формой уравнений состояния. Координаты  $x_i$  являются в большинстве случаев абстрактными переменными, лишёнными всякого физического смысла. Они редко соответствуют реальным координатам (ток, скорость, ускорение и т.п.), однако именно эти координаты определяют положение (состояние) системы в заданном векторном пространстве, отсюда и название метода МПС.

Размерность системы  $n$  определяется размерностью вектора  $X$  или матрицы состояния  $A$ . Множество значений вектора  $X$  называется пространством состояний.

Для стандартной формы уравнений состояния (4.1) ÷ (4.2) можно построить блок-схему, приведённую на рис. 4.1.

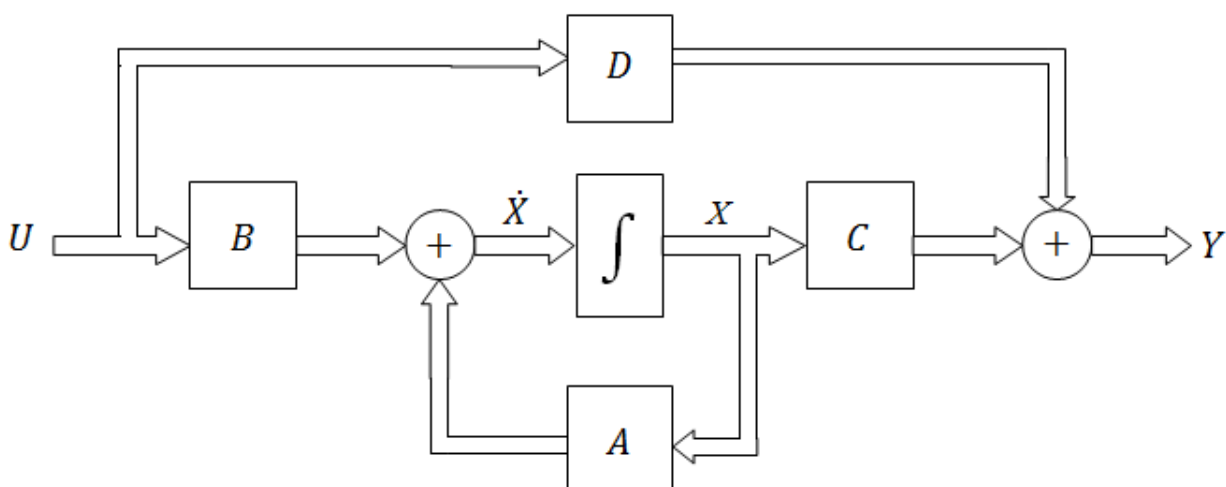


Рис. 4.1

В методе МПС широко используется графическая интерпретация уравнений состояния в виде так называемых расчётных моделей (РМ) [7]. Они значительно облегчают определение уравнений состояния для заданной САУ.

#### 4.1.2. Расчётные модели в пространстве состояний

Основными элементами РМ являются интеграторы (рис. 4.2), умножители (рис. 4.3) и сумматоры (рис. 4.4).

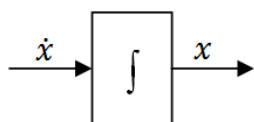


Рис. 4.2

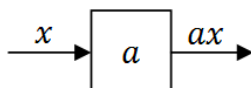


Рис. 4.3

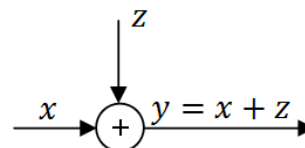


Рис. 4.4

Расчётные модели обычно строятся на основе дифференциальных уравнений динамических объектов и систем. Существует несколько способов получения РМ и соответствующих этой модели уравнений (4.1)÷(4.2). Рассмотрим один из них, называемый методом последовательного интегрирования наивысшей производной, на примере построения РМ электродвигателя постоянного тока независимого возбуждения, заданного дифференциальным уравнением второго порядка

$$T_3 T_M \Omega^{(2)}(t) + T_M \Omega^{(1)}(t) + \Omega(t) = k_\partial U_\partial(t),$$

где  $\Omega(t)$ ,  $U_\partial(t)$  - соответственно скорость вращения двигателя и напряжение питания якорной цепи.

Разрешим это уравнение относительно второй производной:

$$\Omega^{(2)}(t) = -\frac{1}{T_3} \Omega^{(1)}(t) - \frac{1}{T_3 T_M} \Omega(t) + \frac{k_\partial}{T_3 T_M} U_\partial(t). \quad (4.3)$$

Построим цепочку из двух интеграторов с сумматором на входе первого слева интегратора. Затем добавим каналы суммирования фазовых координат  $\Omega^{(1)}(t)$ ,  $\Omega(t)$  согласно уравнению (4.3). В результате получим РМ, представленную на рис. 4.5.

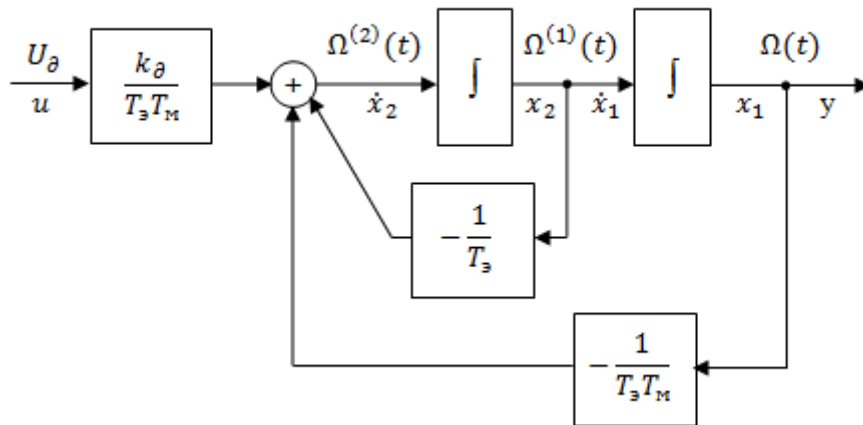


Рис. 4.5

Обозначим выходы интеграторов символами переменных состояния:  $x_1 = \Omega(t)$ ,  $x_2 = \Omega^{(1)}(t)$ . С целью стандартизации записи уравнений состояния в форме (4.1)÷(4.2), положим  $y = \Omega(t)$ ,  $u = U_\theta$ . Тогда на основе построенной РМ получим:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0x_1 + 1x_2 + 0u, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{T_\theta T_M}x_1 - \frac{1}{T_\theta}x_2 + \frac{k_\theta}{T_\theta T_M}u, \\ y &= 1x_1 + 0x_2 + 0u. \end{aligned}$$

Отсюда в матричной форме имеем

$$\dot{X} = AX + bu, \quad (4.4)$$

$$y = c^T X + du, \quad (4.5)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{T_\theta T_M} & -\frac{1}{T_\theta} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_\theta}{T_\theta T_M} \end{bmatrix}, \quad c^T = [1, \quad 0], \quad d = 0.$$

Система уравнений (4.4)÷(4.5) является стандартной формой уравнений состояния для системы с одним входом и одним выходом. Это частный случай уравнений (4.1)÷(4.2), в которых матрицы  $B, C, D$  вырождаются в соответствующие вектор-столбец  $b$ , вектор – строку  $c^T$  и скаляр  $d$ .

Если задана САУ с ПФ её звеньев, то для каждого звена можно построить расчётные модели, а затем соединить их согласно связям в структурной схеме системы.

Рассмотрим эту методику на примере. Пусть задана структурная схема рассмотренного ранее электродвигателя постоянного тока, которая

представлена на рис. 4.6, где  $R_{я}$  – сопротивление якорной цепи,  $J$  – приведенный момент инерции якоря,  $I_{я}$  – ток якоря,  $E$  – ЭДС внутренней обратной связи по  $\Omega$ ,  $c_e$  и  $c_m$  – коэффициенты пропорциональности.

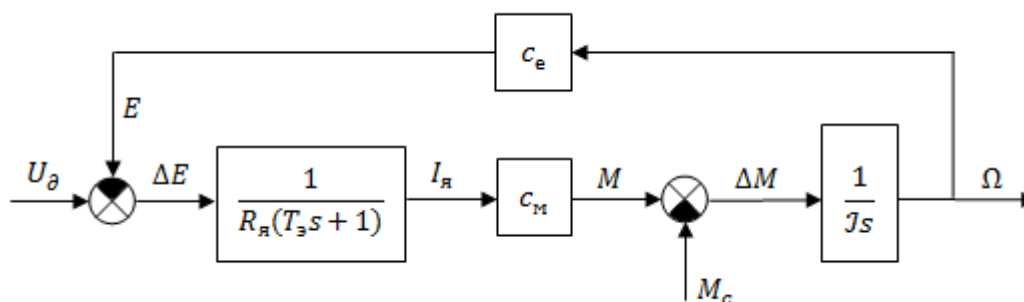


Рис. 4.6

Необходимо получить уравнения состояния для данной структуры, при этом в качестве входных координат использовать напряжение питания  $U_{д}(t)$  и момент сопротивления  $M_{с}(t)$ , а в качестве выходных координат взять скорость вращения электродвигателя  $\Omega(t)$  и развиваемый им момент  $M(t)$ .

В приведённой структурной схеме динамическими элементами являются два блока, описываемые следующими ПФ:

$$W_1(s) = \frac{I_{я}(s)}{\Delta E(s)} = \frac{1}{R_{я}(T_{э}s + 1)}, \quad W_2(s) = \frac{\Omega(s)}{\Delta M(s)} = \frac{1}{J s}.$$

Поэтому для получения РМ электродвигателя достаточно построить расчётные модели этих блоков, а затем соединить все частные РМ в соответствии со структурной схемой ЭД (рис. 4.6).

По ПФ  $W_1(s)$  можно определить эквивалентное дифференциальное уравнение

$$T_{э} \dot{I}_{я} + I_{я} = \frac{1}{R_{я}} \Delta E,$$

разрешив которое относительно производной  $\dot{I}_{я}$  получим

$$\dot{I}_{я} = -\frac{1}{T_{э}} I_{я} + \frac{1}{T_{э} R_{я}} \Delta E.$$

Используя методику последовательного интегрирования старшей производной, по данному уравнению можно построить РМ, приведённую на рис. 4.7.

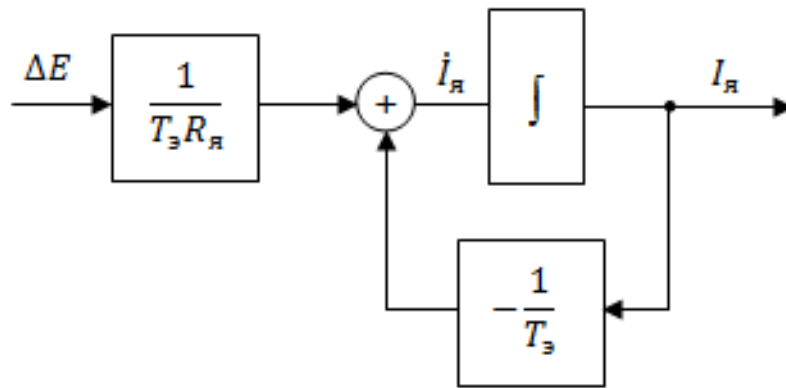


Рис. 4.7

Аналогично можно построить РМ для  $W_2(s)$ . Она представлена на рис. 4.8.

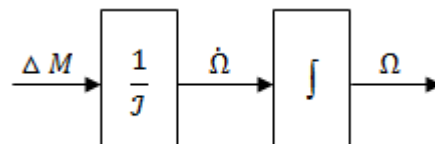


Рис. 4.8

Для других звеньев расчётные модели имеют вид простых умножителей и сумматоров.

Далее, используя полученные РМ можно построить комбинированную РМ системы в целом (рис. 4.9). Здесь в качестве переменных состояния  $x_i$  выбраны также выходы интеграторов, при этом индексация переменных состояния может осуществляться в произвольном порядке.

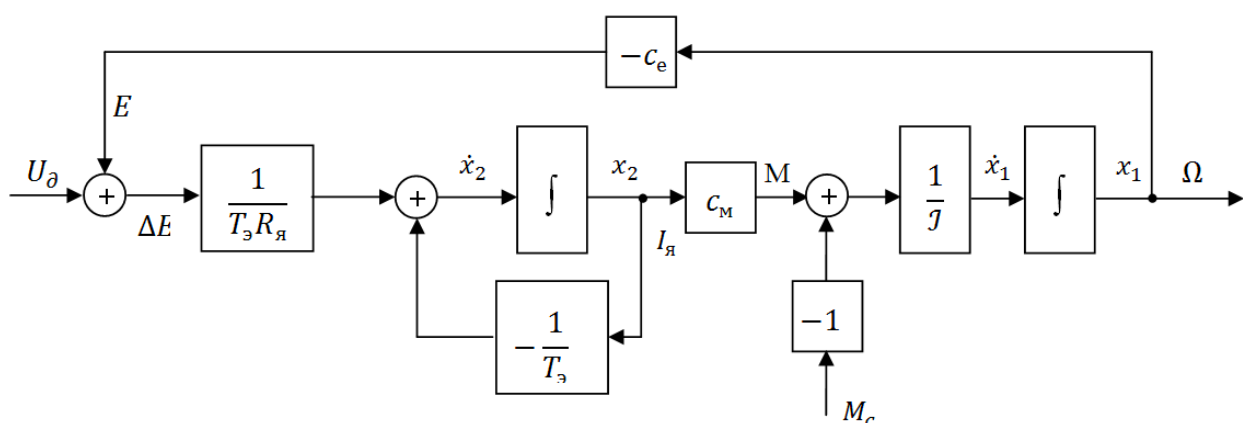


Рис. 4.9

На основе комбинированной РМ можно записать систему двух уравнений состояния относительно первых производных  $\dot{x}_1$  и  $\dot{x}_2$ :

$$\dot{x}_1 = 0x_1 + \frac{c_M}{J}x_2 + 0U_D - \frac{1}{J}M_C, \quad (4.6)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{c_E}{T_{\text{Э}}R_{\text{Я}}}x_1 - \frac{1}{T_{\text{Э}}}x_2 + \frac{1}{T_{\text{Э}}R_{\text{Я}}}U_D + 0M_C, \quad (4.7)$$

Согласно заданию для выходных координат имеем

$$\Omega = 1x_1 + 0x_2 + 0U_D + 0M_C, \quad (4.8)$$

$$M = 0x_1 + c_Mx_2 + 0U_D + 0M_C. \quad (4.9)$$

Отсюда, сравнивая структуру уравнений (4.1)÷(4.2) с уравнениями (4.6)÷(4.9) можно записать

$$X = [x_1, x_2]^T, \quad Y = [\Omega, M]^T, \quad U = [U_D, M_C]^T;$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{c_M}{J} \\ -\frac{c_E}{T_{\text{Э}}R_{\text{Я}}} & -\frac{1}{T_{\text{Э}}} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{J} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_M \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Если в качестве входного воздействия взять одно напряжение  $U_D$  и один выход  $\Omega$ , то система уравнений состояния будет иметь вид (4.4)÷(4.5). При этом структура матрицы  $A$  не изменится, а матрицы  $B, C$  и  $D$  вырождаются в соответствующие векторы:

$$b = \left[0, \frac{1}{T_{\text{Э}}R_{\text{Я}}}\right]^T, \quad c^T = [1, 0], \quad d = 0.$$

Следует отметить, что, несмотря на различие в переменных состояния, полученные в рассмотренных примерах уравнения состояния эквивалентны относительно координат вход – выход.

В большинстве своём исходные дифференциальные уравнения САУ содержат в правой части производные или передаточные функции имеют числитель с порядком отличным от нуля. В этом случае метод последовательного интегрирования старшей производной для инженерной практики не подходит, т.к. требуется производить пересчёт начальных условий на интеграторах РМ по довольно сложным соотношениям. Выход находят в использовании так называемых типовых (канонических) форм РМ.

Типовые расчётные модели имеют регулярные структуры, что значительно упрощает получение уравнений состояния динамических систем. До настоящего времени ещё нет единства в обозначении данных форм, хотя



большинство специалистов склоняется использовать терминологию В. Стрейца [9]. В дальнейшем будем придерживаться этой терминологии.

Для решения выше указанной проблемы используются две канонические формы РМ:

- каноническая форма восстанавливаемости (КФВ);
- каноническая форма управляемости (КФУ).

Рассмотрим эти модели более подробно.

#### 4.1.3. Каноническая форма восстанавливаемости

Расчётная модель КФВ представлена на рис. 4.10. Для перехода к данной РМ от дифференциального уравнения вида

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i y^{(i)} = \sum_{i=0}^n \beta_i u^{(i)} \quad (4.10)$$

достаточно положить

$$a_i = \alpha_i, \quad b_i = \beta_i, \quad i = 0 \div n, \quad (4.11)$$

т.е. осуществить “одноимённую” подстановку.

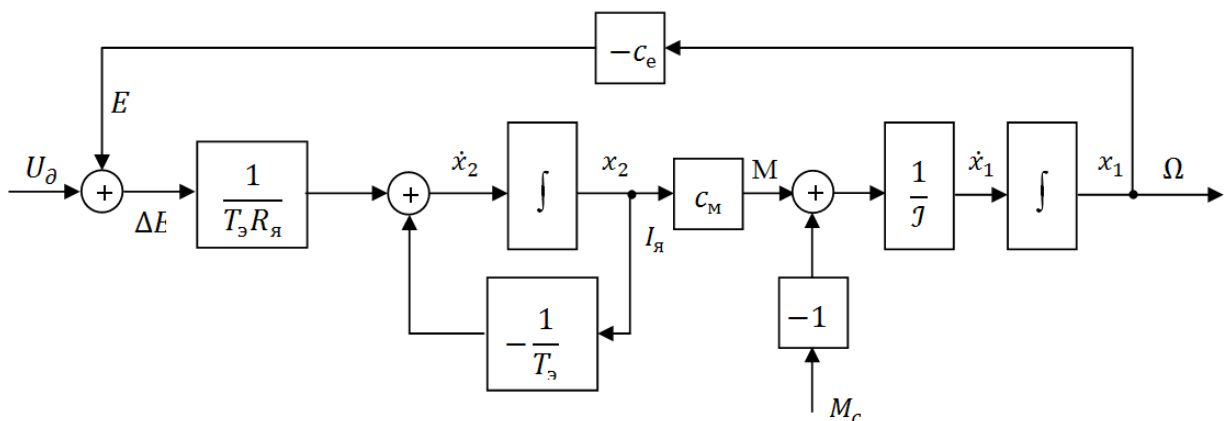


Рис. 4.10

Покажем справедливость соотношений (4.11). С этой целью осуществим структурное преобразование канала управления следующим образом:

1) последовательно перенесём влево сигнал  $b_n u$  через все интеграторы, затем такую же процедуру осуществим с другими сигналами  $b_i u$ . В результате получим

$$(b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_n s^n) u = B(s) u,$$

2) перенесём влево все сигналы по выходу  $y$ , начиная с  $-a_{n-1}y$  на вход РМ. В итоге можно будет записать

$$-(a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_{n-1}s^{n-1})y = -A(s)y .$$

В результате такого преобразования расчётная модель трансформируется в структуру, приведённую на рис. 4.11.

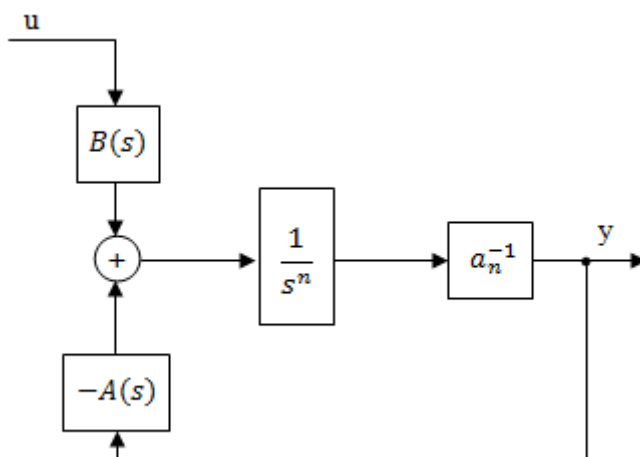


Рис. 4.11

Для этой схемы имеем

$$[B(s)u - A(s)y] \frac{1}{a_n s^n} = y$$

или

$$a_n s^n y + A(s)y = B(s)u.$$

Перепишем последнее уравнение в развёрнутой форме

$$a_n s^n y + a_{n-1} s^{n-1} y + \dots + a_1 s y + a_0 y = \sum_{i=0}^n b_i s^i u$$

или окончательно

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)} = \sum_{i=0}^n b_i u^{(i)} .$$

Сравнивая это уравнение с (4.10), получим искомые соотношения (4.11).

Для РМ в форме КФВ можно записать:

$$\dot{x}_1 = 0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_{n-1} - \frac{a_0}{a_n}x_n + \left(b_0 - \frac{b_n}{a_n}a_0\right)u,$$

$$\dot{x}_2 = 1x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_{n-1} - \frac{a_1}{a_n}x_n + \left(b_1 - \frac{b_n}{a_n}a_1\right)u,$$

.....

$$\dot{x}_{n-1} = 0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_{n-1} - \frac{a_{n-2}}{a_n}x_n + \left(b_{n-2} - \frac{b_n}{a_n}a_{n-2}\right)u,$$

$$\dot{x}_n = 0x_1 + 0x_2 + \dots + 1x_{n-1} - \frac{a_{n-1}}{a_n}x_n + \left(b_{n-1} - \frac{b_n}{a_n}a_{n-1}\right)u,$$

$$y = 0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_{n-1} + \frac{1}{a_n}x_n + \frac{b_n}{a_n}u.$$

Таким образом, для КФВ имеем следующую стандартную форму уравнений состояния с одним входом и одним выходом

$$\dot{X} = A_k X + b_k u, \quad (4.12)$$

$$y = c_k^T X + d_k u, \quad (4.13)$$

где

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{a_0}{a_n} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\frac{a_1}{a_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{a_{n-2}}{a_n} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}; \quad b_k = \begin{bmatrix} b_0 - \frac{b_n}{a_n}a_0 \\ b_1 - \frac{b_n}{a_n}a_1 \\ \vdots \\ b_{n-2} - \frac{b_n}{a_n}a_{n-2} \\ b_{n-1} - \frac{b_n}{a_n}a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

$$c_k^T = \left[0, 0, \dots, 0, \frac{1}{a_n}\right]; \quad d_k = \frac{b_n}{a_n}.$$

Необходимо отметить, что в реальных задачах  $b_n = 0$ , а коэффициент  $a_n$  всегда можно сделать равным единице, поделив уравнение (4.10) на  $a_n$ . Поэтому коэффициенты матриц  $A_k, b_k, c_k^T, d_k$  значительно упрощаются. Ещё следует заметить, что матрица  $A_k$  имеет специфическую регулярную структуру, которая относится к так называемым формам Фробениуса.

Анализ полученных уравнений (4.12), (4.13) показывает, что для определения уравнений состояния в форме КФВ нет необходимости строить РМ. Можно сразу вычислить матрицы  $A_k, b_k, c_k^T, d_k$ , т.к. структура этих матриц

определена и связана однозначно с дифференциальным уравнением (4.10) и формулами перехода (4.11).

*Пример 4.1.* Пусть задано дифференциальное уравнение электродвигателя постоянного тока

$$T_{\Omega}T_M\Omega^{(2)}(t) + T_M\Omega^{(1)}(t) + \Omega(t) = -k_C T_{\Omega}M_C^{(1)}(t) - k_C M_C(t),$$

которое связывает скорость вращения  $\Omega(t)$  с моментом сопротивления  $M_C(t)$ . Очевидно в этом случае  $a_2 = T_{\Omega}T_M$ ,  $a_1 = T_M$ ,  $a_0 = 1$ ,  $b_2 = 0$ ,  $b_1 = -k_C T_{\Omega}$ ,  $b_0 = -k_C$ .

Используя соотношения (4.11), (4.12), получим для КФВ:

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{T_{\Omega}T_M} \\ 1 & -\frac{1}{T_M} \end{bmatrix}, \quad b_k = \begin{bmatrix} -k_C \\ -k_C T_{\Omega} \end{bmatrix}, \quad c_k^T = \left[ 0, \frac{1}{T_{\Omega}T_M} \right], \quad d_k = 0.$$

#### 4.1.4. Каноническая форма управляемости

Расчётная модель КФУ представлена на рис. 4.12. Для получения формул перехода преобразуем эту РМ следующим образом:

- 1) перенесём все коэффициенты  $b_i$  влево к  $b_n$ , что позволит записать для выходной координаты выражение вида

$$y = \left( b_n + \frac{b_{n-1}}{s} + \frac{b_{n-2}}{s^2} + \dots + \frac{b_0}{s^n} \right) \dot{x}_n,$$

из которого получим

$$\dot{x}_n = \frac{1}{B(s)} y,$$

где

$$B(s) = b_n + \frac{b_{n-1}}{s} + \frac{b_{n-2}}{s^2} + \dots + \frac{b_0}{s^n}.$$

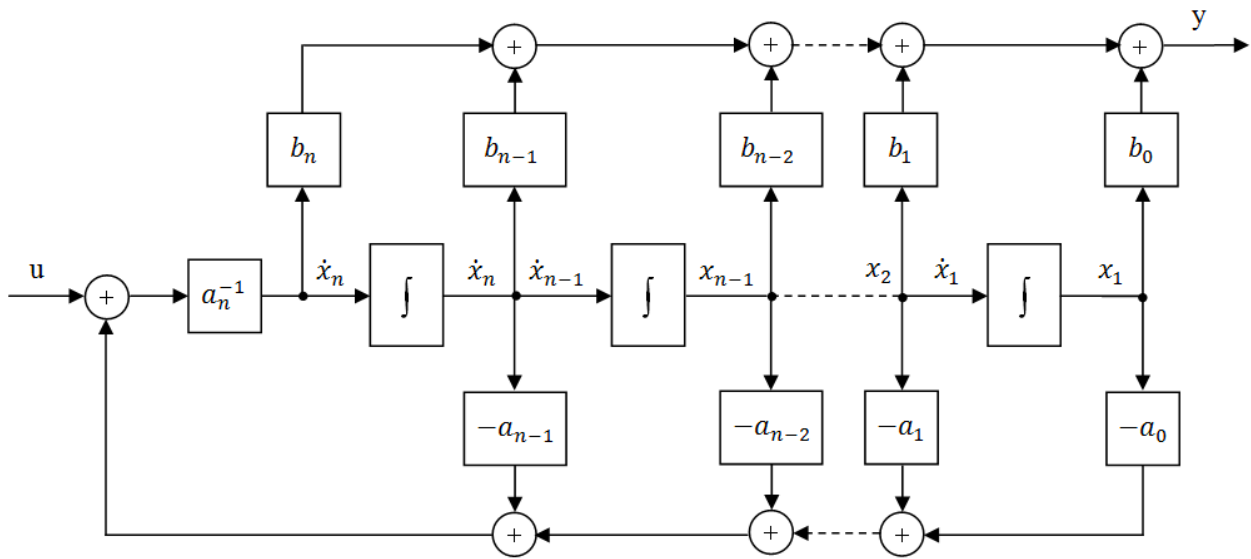


Рис. 4.12

2) перенесём все ветви с коэффициентами  $a_i$  к координате  $\dot{x}_n$ ; в итоге получим структуру, приведённую на рис. 4.13, где

$$A(s) = -\frac{a_{n-1}}{s} - \frac{a_{n-2}}{s^2} - \dots - \frac{a_0}{s^n}.$$

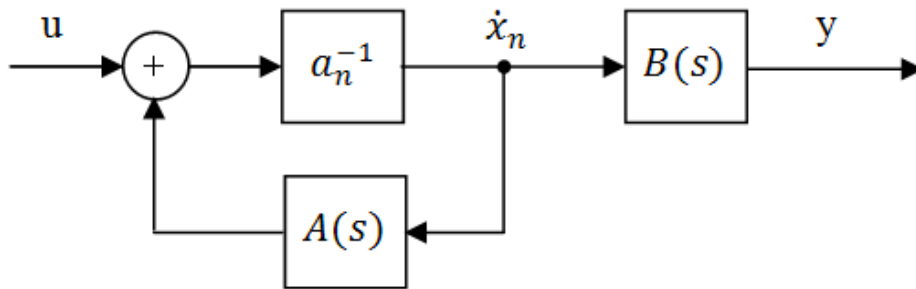


Рис. 4.13

Для преобразованной РМ можно записать

$$\dot{x}_n = a_n^{-1}[u + A(s)\dot{x}_n] = a_n^{-1}u + a_n^{-1}A(s)\dot{x}_n$$

или

$$\dot{x}_n = \frac{1}{a_n - A(s)} u.$$

Объединим полученные соотношения для  $\dot{x}_n$ :



т.к. они имеют регулярные структуры и их элементы получаются простой подстановкой коэффициентов дифференциального уравнения в соответствии с формулами (4.11).

Сравнение КФВ и КФУ позволяет сделать вывод, что они дуальны друг к другу, т.е.

$$A_k = A_r^T, \quad b_k = c_r, \quad c_k^T = b_r^T, \quad d_k = d_r,$$

и наоборот

$$A_r = A_k^T, \quad b_r = c_k, \quad c_r^T = b_k^T, \quad d_r = d_k.$$

Отсюда следует, что достаточно определить одну из этих форм, а другую можно получить на основе соотношений дуальности.

*Пример 4.2.* Используя результаты решения примера 4.1, получим матрицы для КФУ:

$$A_r = A_k^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T_M T_\Sigma} & -\frac{1}{T_\Sigma} \end{bmatrix}, \quad b_r = c_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{T_\Sigma T_M} \end{bmatrix},$$

$$c_r^T = b_k^T = [-k_C, -k_C T_\Sigma], \quad d_r = d_k = 0.$$

Если система автоматического управления имеет сложную структуру, то КФВ и КФУ целесообразно использовать для построения РМ отдельных динамических звеньев, объектов или подсистем регулирования с последующим их объединением в комбинированную РМ, по которой затем записываются искомые уравнения состояния всей системы в целом.

#### 4.1.5. Диагональная каноническая форма

Особое место в методе пространства состояний занимает диагональная каноническая форма (ДКФ). Она требует разложения передаточной функции динамической системы на элементарные составляющие. При этом следует выделить два случая: когда все полюсы различные и когда имеются кратные полюсы. Рассмотрим сначала вариант некратных корней знаменателя ПФ.

Пусть передаточная функция имеет следующий вид:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{i=0}^m \beta_i s^i}{\sum_{i=0}^n \alpha_i s^i}. \quad (4.16)$$

Её можно представить в виде суммы элементарных составляющих первого порядка:

$$W(s) = c_0 + \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s - \lambda_i}, \quad (4.17)$$

где  $\lambda_i$  - корни знаменателя (полюсы) ПФ.

Коэффициенты  $c_i$  определяются с помощью вычетов:

$$c_0 = W(s) \Big|_{s=\infty} = \begin{cases} 0 & \text{при } m < n, \\ \frac{b_n}{a_n} & \text{при } m = n, \end{cases} \quad (4.18)$$

$$c_i = (s - \lambda_i)W(s) \Big|_{s=\lambda_i}. \quad (4.19)$$

Для составляющей разложения (4.17)  $\frac{c_i}{s - \lambda_i}$  можно построить элементарную РМ (рис. 4.14), используя метод интегрирования старшей производной:

$$y_i = \frac{c_i}{s - \lambda_i} u, \quad sy_i = \lambda_i y_i + c_i u, \quad \dot{y} = \lambda_i y_i + c_i u.$$

В данной РМ коэффициент  $c_i$  целесообразно переместить на выход этой модели, что обычно и делается.

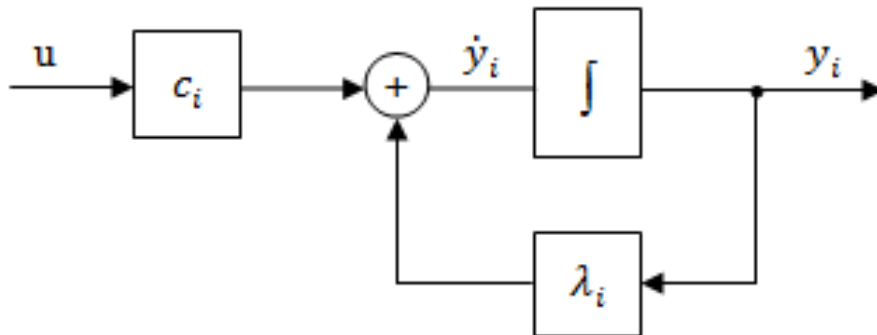


Рис. 4.14

Используя элементарные расчетные модели и разложение (4.17) можно построить искомую РМ, представленную на рис. 4.15.



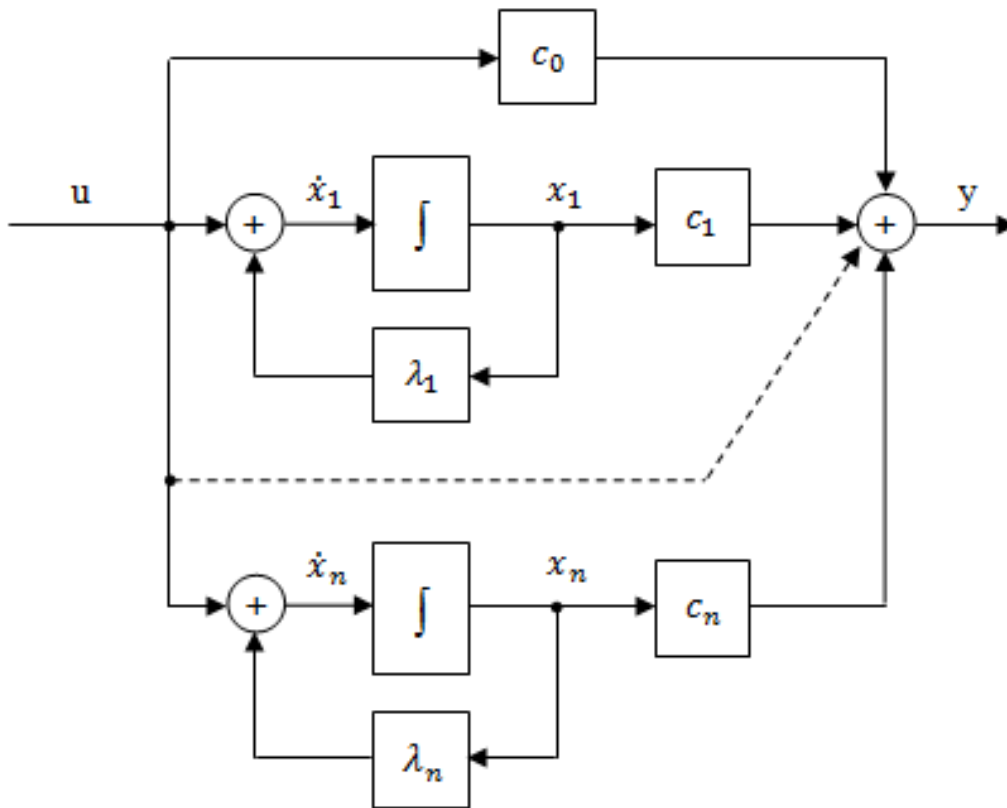


Рис. 4.15

По полученной РМ легко определить уравнения состояния:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n + 1u, \\ \dot{x}_2 &= 0x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + 0x_n + 1u, \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n &= 0x_1 + 0x_2 + \dots + \lambda_n x_n + 1u, \\ y &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n + c_0 u, \end{aligned}$$

или в векторно-матричной форме

$$\dot{X} = \Lambda X + bu, \tag{4.20}$$

$$y = c^T X + du, \tag{4.21}$$

где

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c^T = [c_1, c_2, \dots, c_n], \quad d = c_0.$$

*Пример 4.3.* Определить ДКФ для динамической системы, заданной передаточной функцией

$$W(s) = \frac{2s^2 + 8s + 11}{s^2 + 3s + 2}.$$

Полюсы в этой ПФ очевидно равны:  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -2$ , поэтому можно записать

$$W(s) = \frac{2s^2 + 8s + 11}{(s + 1)(s + 2)} = c_0 + \frac{c_1}{s + 1} + \frac{c_2}{s + 2},$$

где

$$c_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} W(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2 + 8s^{-1} + 11s^{-2}}{1 + 3s^{-1} + 2s^{-2}} = 2;$$

$$c_1 = (s + 1)W(s)|_{s=-1} = \frac{2s^2 + 8s + 11}{s + 2} \Big|_{s=-1} = 5;$$

$$c_2 = (s + 2)W(s)|_{s=-2} = \frac{2s^2 + 8s + 11}{s + 1} \Big|_{s=-2} = -3.$$

Отсюда

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$y = [5, -3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 2u.$$

Передаточные функции САУ очень часто имеют комплексно-сопряжённые полюса  $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$ , которые определяют в итоге колебательный вид переходных характеристик системы. Расчетные модели систем с такими полюсами имеют специфическую структуру.

Покажем сначала, что РМ, представленная на рис.4.16, является колебательным звеном с ПФ

$$W(s) = \frac{k}{(s + \alpha + j\beta)(s + \alpha - j\beta)}.$$

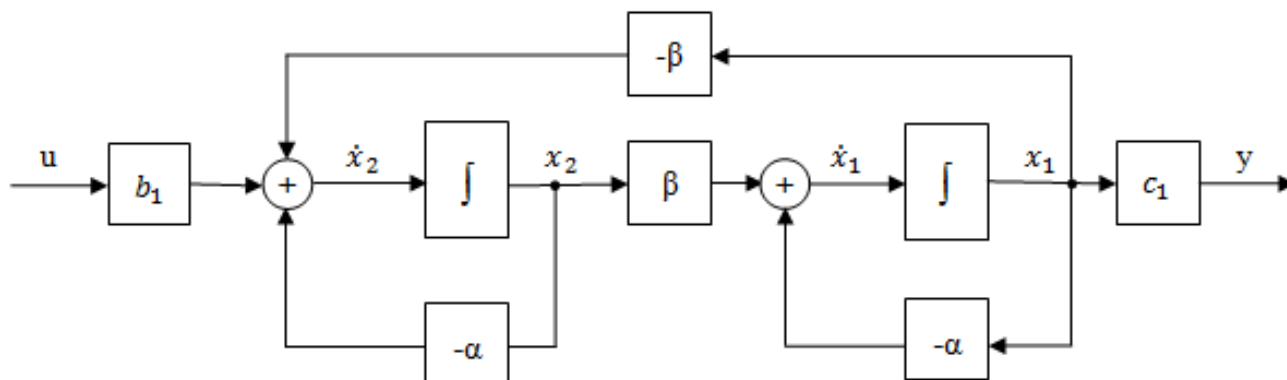


Рис. 4.16

Передаточную функцию этой структуры получим с помощью правила Мейсона:

$$W(s) = \frac{b_1 c_1 \beta}{1 + \frac{2\alpha}{s} + \frac{\beta^2}{s^2} + \frac{\alpha^2}{s^2}} = \frac{b_1 c_1 \beta}{s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 + \beta^2} = \frac{b_1 c_1 \beta}{(s + \alpha + j\beta)(s + \alpha - j\beta)}.$$

Таким образом, это искомая ПФ колебательного звена, в которой  $k = b_1 c_1 \beta$ .

По РМ колебательного звена (рис. 4.16) можно определить уравнения состояния:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\alpha x_1 + \beta x_2 + 0u, \\ \dot{x}_2 &= -\beta x_1 - \alpha x_2 + b_1 u, \\ y &= c_1 x_1 + 0x_2 + 0u,\end{aligned}$$

т.е. имеем

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha & \beta \\ -\beta & -\alpha \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \end{bmatrix}; \quad c^T = [c_1, 0]; \quad d = 0.$$

Следует обратить внимание на структуру матрицы  $A$ . Она представляет собой так называемую клетку из параметров комплексно-сопряженных полюсов. Если система имеет, например, две пары комплексно-сопряженных полюсов, то матрица состояния будет иметь следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & \beta_1 & 0 & 0 \\ -\beta_1 & -\alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_2 & \beta_2 \\ 0 & 0 & -\beta_2 & -\alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Иногда передаточная функция может содержать кратные полюсы. Это самый трудный вариант определения уравнений состояния в форме ДКФ. Если имеется  $r$  кратных полюсов, то разложение на сумму простых дробей осуществляется с использованием вычетов в следующем виде:

$$\frac{c_1}{(s - \lambda)^r} + \frac{c_2}{(s - \lambda)^{r-1}} + \dots + \frac{c_r}{s - \lambda},$$

где

$$c_{m+1} = \frac{1}{m!} [(s - \lambda)^r W(s)]^{(m)}|_{s=\lambda}, \quad m = 0, 1, \dots, r - 1. \quad (4.22)$$

*Пример 4.4.* Получить уравнения состояния динамической системы по её ПФ

$$W(s) = \frac{5}{(s+3)^2(s+2)}.$$

Очевидно, что ПФ имеет два кратных и один простой полюсы  $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ ,  $\lambda_3 = -2$ . Исходя из этого, разложение ПФ на сумму элементарных составляющих имеет следующий вид:

$$W(s) = \frac{c_1}{(s+3)^2} + \frac{c_2}{s+3} + \frac{c_3}{s+2}, \quad (4.23)$$

где коэффициенты  $c_1$  и  $c_2$  вычисляются по (4.22) при  $r=2$ :

$$m = 0, \quad c_1 = (s+3)^2 \frac{5}{(s+2)(s+3)^2} \Big|_{s=-3} = -5,$$

$$m = 1, \quad c_2 = \left[ (s+3)^2 \frac{5}{(s+2)(s+3)^2} \right]^{(1)} = \frac{-5}{(s+2)^2} \Big|_{s=-3} = -5,$$

$$c_3 = (s+2) \frac{s}{(s+2)(s+3)^2} \Big|_{s=-2} = 5.$$

По разложению (4.23) можно построить РМ, представленную на рис. 4.17.

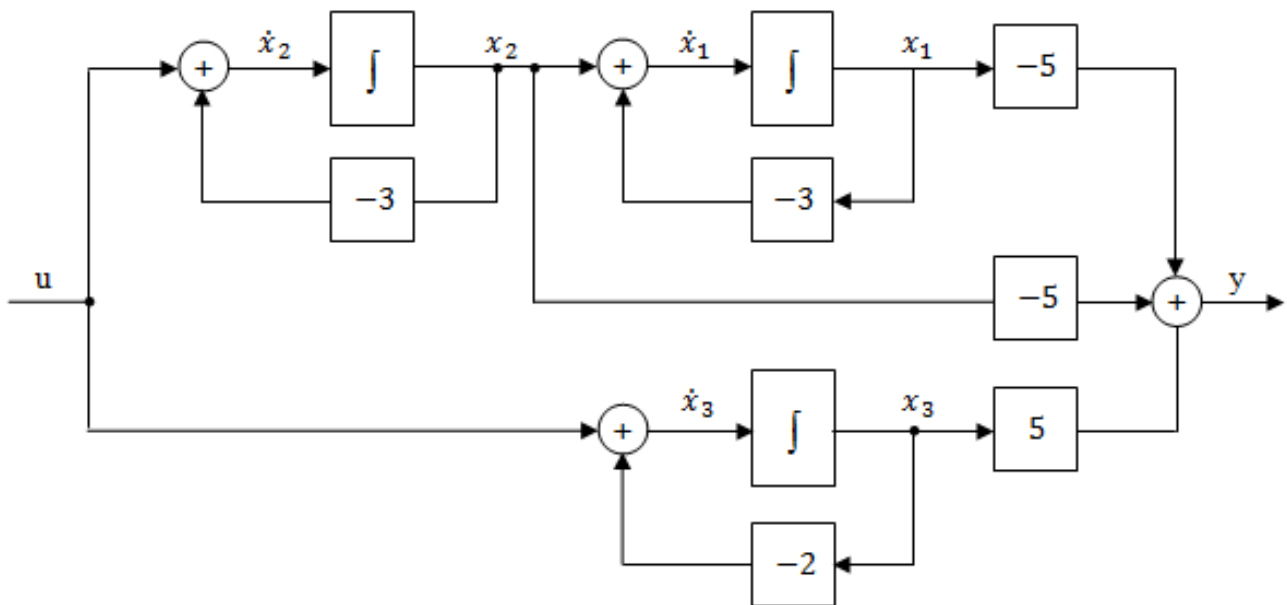


Рис. 4.17

Данная РМ описывается следующей системой уравнений состояния:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -3x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0u, \\ \dot{x}_2 &= 0x_1 - 3x_2 + 0x_3 + 1u, \\ \dot{x}_3 &= 0x_1 + 0x_2 - 2x_3 + 1u, \\ y &= -5x_1 - 5x_2 + 5x_3 + 0u, \end{aligned}$$

т.е. для матриц уравнений состояния в форме ДКФ имеем:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad c^T = [-5, \quad -5, \quad 5], \quad d = 0.$$

Следует отметить, что в матрице  $A$  появился специфический блок, выделенный пунктиром. Он называется клеткой Жордана, в связи с чем полученная форма уравнений состояния часто называется канонической формой Жордана с матрицей  $A = J$ :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= JX + bu, \\ y &= c^T X + du. \end{aligned}$$

Клетки Жордана в общем случае имеют единичные наддиагонали размером  $r-1$ , где  $r$  – кратность полюсов. Например, если имеется четыре кратных полюса  $\lambda_1$ , три кратных полюса  $\lambda_2$  и один некратный полюс  $\lambda_3$ , то матрицу состояния можно будет представить в следующем виде:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

## 4.2. Решение уравнений состояния

Ранее было показано, что математическая модель линейной динамической системы со многими входами и выходами может быть представлена в виде стандартной формы уравнений состояния

$$\dot{x} = AX + BU, \tag{4.24}$$

$$Y = CX + DU. \tag{4.25}$$

Решение этой системы уравнений сводится по существу к определению решения матричного дифференциального уравнения первого порядка (4.24), т.к. уравнение (4.25) является простым алгебраическим соотношением. Для решения уравнения (4.24) можно использовать два основных способа: операторный метод и решение в функции времени.

### 4.2.1. Операторный метод решения уравнений состояния

Этот способ предполагает применение преобразования Лапласа к обеим частям уравнения (4.24):

$$sX(s) - X(0) = AX(s) + BU(s),$$

откуда после соответствующего преобразования получим

$$(sI - A)X(s) = X(0) + BU(s), \quad (4.26)$$

где  $I$  – единичная диагональная матрица.

Умножая слева обе части (4.26) на  $(sI - A)^{-1}$ , определим искомый вектор состояния

$$X(s) = (sI - A)^{-1}X(0) + (sI - A)^{-1}BU(s), \quad (4.27)$$

или окончательно

$$X(s) = \Phi(s)X(0) + \Phi(s)BU(s), \quad (4.28)$$

где

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1}. \quad (4.29)$$

Последняя в современной теории управления получила название матрицы перехода (или переходной матрицы). В математике её называют фундаментальной матрицей.

Подставив (4.27) в (4.25), получим выражение для вектора выходных координат:

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}X(0) + [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s). \quad (4.30)$$

Если положить вектор начальных условий равных нулю, т.е.  $X(0) = 0$ , то получим из (4.30) передаточную матрицу системы:

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D. \quad (4.31)$$

В частном случае для системы с одним входом  $u(t)$  и одним выходом  $y(t)$  передаточная матрица вырождается в обыкновенную передаточную функцию:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = c^T(sI - A)^{-1}b + d. \quad (4.32)$$

Из выражений (4.28), (4.30) следует, что определение матрицы перехода  $\Phi(s)$  является основным моментом в решении уравнений состояния. Однако её вычисление связано с операцией обращения матрицы  $(sI - A)$  в алгебраической форме, что в общем случае является довольно трудоёмкой процедурой. Существует несколько более или менее эффективных методов решения этой задачи.

#### 4.2.2. Методы вычисления матрицы перехода

Исходя из решения однородного уравнения состояния

$$X(s) = \Phi(s)X(0) \quad (4.33)$$

следует, что  $\Phi(s)$  является квадратной матрицей вида

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(s) & \cdots & \varphi_{1n}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1}(s) & \cdots & \varphi_{nn}(s) \end{bmatrix}, \quad (4.34)$$

где  $\varphi_{ij}(s)$  - передаточные функции для  $i$ -го состояния  $x_i$  по  $j$ -му начальному условию  $x_j(0)$ .

При такой постановке задачи для определения  $\varphi_{ij}(s)$  можно использовать расчётную модель динамической системы, входными координатами которой являются начальные условия на интеграторах.

Рассмотрим этот подход к вычислению  $\Phi(s)$  на основе примера системы с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s^2 + 8s + 11}{s^2 + 3s + 2}.$$

В качестве РМ воспользуемся расчётной моделью этой системы в форме КФВ (рис. 4.18). Порядок системы  $n$  равен двум, поэтому

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(s) & \varphi_{12}(s) \\ \varphi_{21}(s) & \varphi_{22}(s) \end{bmatrix}.$$

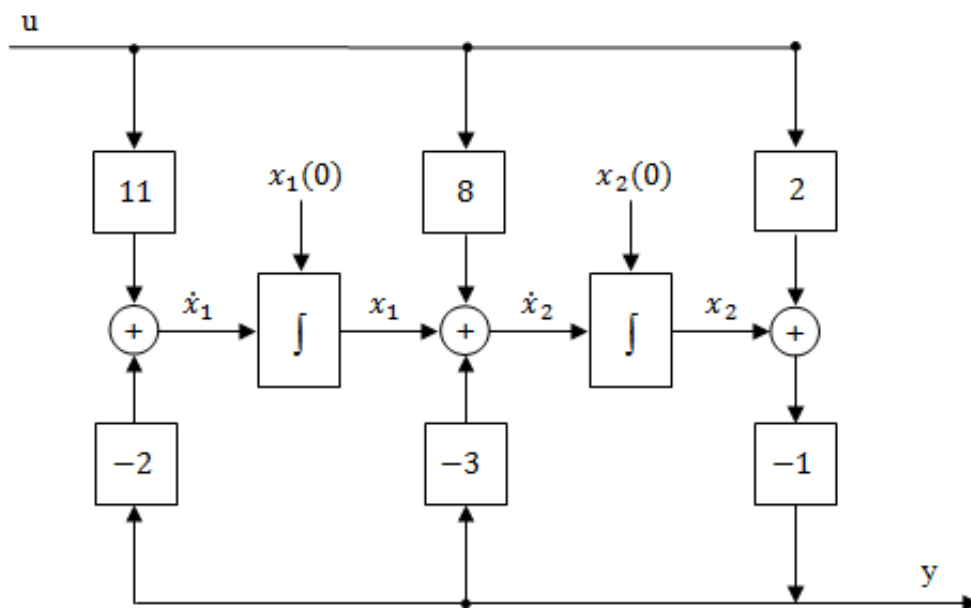


Рис. 4.18

Передаточные функции  $\varphi_{ij}(s)$  удобнее всего определять, применяя правило Мейсона. В результате получим:

$$\begin{aligned}\varphi_{11}(s) &= \frac{\frac{1}{s}(1 + \frac{3}{s})}{1 + \frac{3}{s} + \frac{2}{s^2}} = \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2}, \\ \varphi_{12}(s) &= \frac{-\frac{2}{s^2}}{1 + \frac{3}{s} + \frac{2}{s^2}} = \frac{-2}{s^2 + 3s + 2}, \\ \varphi_{21}(s) &= \frac{\frac{1}{s^2}}{1 + \frac{3}{s} + \frac{2}{s^2}} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}, \\ \varphi_{22}(s) &= \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{3}{s} + \frac{2}{s^2}} = \frac{s}{s^2 + 3s + 2}.\end{aligned}$$

Рассмотренный способ довольно трудоёмок и трудно формализуем, поэтому его целесообразно использовать для невысокого порядка системы. Наиболее общим методом определения матрицы перехода является алгоритм Фаддеева-Леве́рье, который не критичен к порядку системы  $n$  и удобен для программирования. Этот метод предполагает получение  $\Phi(s)$  в виде отношения операторных полиномов:

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{Is^{n-1} + M_1s^{n-2} + \dots + M_{n-2}s + M_{n-1}}{s^n - m_1s^{n-1} - \dots - m_{n-1}s - m_n}, \quad (4.35)$$

где коэффициенты  $M_i$  и  $m_i$  определяются по следующему алгоритму:

$$A_i = AM_{i-1}, \quad m_i = \frac{1}{i} \text{tr} A_i, \quad M_i = A_i - m_i I, \quad M_0 = I, \quad i = 1 \div n, \quad (4.36)$$

или в развернутой форме

$$\begin{aligned}A_1 &= A, \quad m_1 = \text{tr} A_1, \quad M_1 = A_1 - m_1 I; \\ A_2 &= AM_1, \quad m_2 = \frac{1}{2} \text{tr} A_2, \quad M_2 = A_2 - m_2 I; \\ A_3 &= AM_2, \quad m_3 = \frac{1}{3} \text{tr} A_3, \quad M_3 = A_3 - m_3 I; \\ &\dots \dots \dots \\ A_n &= AM_{n-1}, \quad m_n = \frac{1}{n} \text{tr} A_n, \quad M_n = A_n - m_n I = 0,\end{aligned}$$

где  $\text{tr} A_i$  - след матрицы  $A_i$ .



Последнее равенство служит для контроля точности расчёта матрицы перехода  $\Phi(s)$ , т.е. величина  $M_n \neq 0$  является мерой погрешности вычислений.

*Пример 4.5.* В качестве исходных данных для иллюстрации применения алгоритма Фаддеева-Леверье воспользуемся уравнениями состояния, полученными для РМ, представленной на рис. 4.18:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0x_1 - 2x_2 + 7u, \\ \dot{x}_2 &= 1x_1 - 3x_3 + 2u, \\ y &= 0x_1 + 1x_2 + 2u, \end{aligned}$$

из которых видно, что

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad c^T = [0, 1], \quad d = 2, \quad n = 2.$$

Из выражения (4.35) следует, что

$$\Phi(s) = \frac{Is + M_1}{s^2 - m_1s - m_2}.$$

Далее в соответствии с алгоритмом (4.36) имеем:

$$A_1 = AM_0 = AI = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad m_1 = \text{tr}A_1 = -3,$$

$$M_1 = A_1 - m_1I = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A_2 = AM_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad m_2 = \frac{1}{2} \text{tr}A_2 = -2.$$

Проверка показывает, что расчет верен:

$$M_2 = A_2 - m_2I = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

После подстановки вычисленных значений  $M_i$  и  $m_i$  в выражение  $\Phi(s)$  получим окончательно:

$$\Phi(s) = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}s + \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}{s^2 + 3s + 2} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{s^2+3s+2} & \frac{-2}{s^2+3s+2} \\ \frac{1}{s^2+3s+2} & \frac{s}{s^2+3s+2} \end{bmatrix}.$$

Основным достоинством метода Фаддеева-Леверье заключается в исключении операции обращения матрицы в алгебраической форме и рекуррентности алгоритма (4.36), что удобно для автоматизации вычислительных операций.

### 4.2.3. Решение уравнений состояния в функции времени

Полное решение уравнения состояния (4.24) можно получить, применив теорему свёртки Лапласа к уравнению (4.28):

$$X(t) = \Phi(t)X(0) + \int_0^t \Phi(t - \tau)BU(\tau)d\tau, \quad (4.37)$$

где  $\Phi(t)$  - матрица перехода в функции времени.

Трудность дальнейшего решения (4.37) связана с определением интеграла при произвольном векторе входа  $U(t)$ . Однако в инженерной практике наибольший интерес представляют переходные характеристики, для получения которых следует положить  $U(t) = U(0) = const$ . В этом случае вычисление

Определим сначала переходную матрицу  $\Phi(t)$  в виде степенного ряда путём решения однородного уравнения состояния

$$\dot{X}(t) = AX(t) \quad (4.38)$$

Положим

$$\begin{aligned} X(t) = \Phi(t)X(0) &= (C_0 + C_1t + C_2t^2 + C_3t^3 + \dots)X(0) = \\ &= \left( \sum_{i=1}^{\infty} C_i t^i \right) X(0), \end{aligned} \quad (4.39)$$

где  $C_i$  - квадратные матрицы, при этом  $C_0 = I$  (очевидное значение, получаемое из (4.39) при  $t = 0$ ).

Подставив (4.39) в (4.38), получим матричное соотношение

$$(C_1 + 2C_2t + 3C_3t^2 + \dots)X(0) = A(C_0 + C_1t + C_2t^2 + \dots)X(0), \quad (4.40)$$

из которого при  $t = 0$  имеем

$$C_1 = AC_0 = A.$$

Далее после дифференцирования (4.40) получим следующее выражение

$$(2C_2 + 6C_3t + \dots)X(0) = A(C_1 + 2C_2t + \dots)X(0),$$

из которого при  $t = 0$  определим, что

$$2C_2 = AC_1 = A^2$$

или

$$C_2 = \frac{1}{2}A^2.$$

Используя подобную процедуру, получим в итоге рекуррентное соотношение, связывающее  $C_i$  и  $C_{i-1}$ :

$$iC_i = AC_{i-1},$$

из которого можно определить общую формулу вычисления матричных коэффициентов  $C_i$ :

$$C_i = \frac{A^i}{i!}. \quad (4.41)$$

Таким образом, переходная матрица имеет вид экспоненциального матричного ряда:

$$\Phi(t) = e^{At} = I + \frac{A}{1!}t + \frac{A^2}{2!}t^2 + \frac{A^3}{3!}t^3 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!}. \quad (4.42)$$

Это выражение часто называют матричным экспоненциалом. Такая форма  $\Phi(t)$  позволяет выявить ряд полезных свойств матрицы перехода:

- 1)  $e^{At}e^{A\tau} = e^{A(t+\tau)}$ , т.е.  $\Phi(t)\Phi(\tau) = \Phi(t + \tau)$ ;
- 2)  $e^{A(t_2-t_1)}e^{A(t_3-t_2)} = e^{A(t_3-t_1)}$ , т.е.  $\Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_3 - t_2) = \Phi(t_3 - t_1)$ ;
- 3)  $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$ , т.е.  $\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t) = \Phi(t)A$ ;
- 4)  $e^{-At} = e^{A(-t)} = \Phi(-t) = \Phi^{-1}(t)$ ;
- 5)  $\Phi(t - t_0) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$ ;
- 6)  $\Phi(0) = I$ .

Здесь следует заметить, что вычисление матричного экспоненциала осуществляется приближённо. При этом точность расчёта в значительной мере определяется скоростью сходимости ряда (4.42). Не вдаваясь в эту проблему, можно только рекомендовать для вычисления матричного экспоненциала использование специальных математических пакетов, в частности, MatLab.

В ряде случаев, обычно для динамических систем невысокого порядка, матрицу  $\Phi(t)$  можно определить непосредственно по передаточной матрице  $\Phi(s)$ . Для этого целесообразно использовать метод разложения передаточных функций  $\varphi_{ij}(s)$  на сумму элементарных составляющих с последующим применением обратного преобразования Лапласа.

*Пример 4.6.* Вычислить матрицу перехода  $\Phi(t)$  по её передаточной матрице  $\Phi(s)$ , определённой с помощью алгоритма Фаддеева-Леверье в примере 4.5:

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{-2}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{1}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}.$$

Сначала разложим передаточные функции  $\varphi_{ij}(s)$  на элементарные составляющие с помощью вычетов:

$$\varphi_{11}(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{s+2} = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2},$$

так как  $c_1 = \frac{s+3}{s+2} \Big|_{s=-1} = 2, \quad c_2 = \frac{s+3}{s+1} \Big|_{s=-2} = -1;$

$$\varphi_{12}(s) = \frac{-2}{(s+1)(s+2)} = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{s+2} = \frac{-2}{s+1} + \frac{2}{s+2},$$

так как  $c_1 = \frac{-2}{s+2} \Big|_{s=-1} = -2, \quad c_2 = \frac{-2}{s+1} \Big|_{s=-2} = 2;$

$$\varphi_{21}(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{s+2} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2},$$

так как  $c_1 = \frac{1}{s+2} \Big|_{s=-1} = 1, \quad c_2 = \frac{1}{s+1} \Big|_{s=-2} = -1;$

$$\varphi_{22}(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)} = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{s+2} = \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2},$$

так как  $c_1 = \frac{s}{s+2} \Big|_{s=-1} = -1, \quad c_2 = \frac{s}{s+1} \Big|_{s=-2} = 2.$

Далее, используя таблицу преобразования Лапласа, получим искомую  $\Phi(t)$ :

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & -2e^{-t} + 2e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Теперь можно вернуться к определению переходной характеристики по уравнению (4.37), используя соответствующие свойства матричного экспоненциала. Будем искать решение при  $U(t) = U(t_0) = const$  на интервале  $t - t_0$ , где  $t_0$  – начальное время. В этом случае имеем

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{A(t-t_0)}X(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}BU(t_0)d\tau = e^{A(t-t_0)}X(t_0) - \\ &- A^{-1}e^{A(t-\tau)} \Big|_{t_0}^t BU(t_0) = e^{A(t-t_0)}X(t_0) + A^{-1}[e^{A(t-t_0)} - I]BU(t_0). \end{aligned} \quad (4.43)$$

При расчёте переходных процессов удобнее пользоваться дискретным вариантом полученного решения. Для этого положим  $t = t_{k+1}, t_0 = t_k$  и  $T = t_{k+1} - t_k$ , где  $T$  – шаг дискретизации вычислительного процесса. После ввода данного обозначения соотношение (4.42) можно записать в следующем виде:

$$X(t_{k+1}) = \Phi(T)X(t_k) + G(T)U(t_k), \quad (4.44)$$

где  $G(T) = A^{-1}[\Phi(T) - I]B$ ,

или в целом для стандартной формы уравнений состояния:

$$X[(k + 1)T] = \Phi(T)X(kT) + G(T)U(kT) \quad (4.45)$$

$$Y(kT) = CX(kT) + DU(kT), \quad (4.46)$$

где  $k$  – номер шага дискретизации ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ).

Необходимо отметить, что решение уравнения состояния в виде (4.44) позволяет также определять переходные процессы в дискретных системах, в которых управляющее воздействие  $U(t)$  представляет собой последовательность прямоугольных импульсов. При этом интервал  $T = t_{k+1} - t_k$  может изменяться от одного шага дискретизации к другому.

Если координаты вектора входного воздействия изменяются во времени, то решение уравнений состояния, можно получить приближенно, воспользовавшись дискретной аппроксимацией этих уравнений с некоторым шагом  $T$ . Очевидно величина  $T$  ограничивается допустимой погрешностью вычислений. Разработанные в математике способы решения задачи аппроксимации образуют группу численных методов интегрирования дифференциальных уравнений, среди которых наибольшее применение в теории управления находят алгоритмы Эйлера и Рунге-Кутты.

Метод Эйлера основан на аппроксимации производной в виде разности первого порядка:

$$\dot{X} = \frac{X(t + T) - X(t)}{T}. \quad (4.47)$$

В результате уравнение состояния будет иметь следующий вид

$$\frac{X(t + T) - X(t)}{T} = AX(t) + BU(t)$$

или

$$X(t + T) = (I + AT)X(t) + TBU(t). \quad (4.48)$$

Здесь  $I + AT$  является переходной матрицей, которая по существу представляет первые два члена матричного ряда (4.42). Поэтому для достижения требуемой точности в методе Эйлера необходимо использовать очень малое значение  $T$ , что ведёт к значительному увеличению объёма вычислений и соответственно накоплению вычислительной погрешности.

Более эффективными методами численного интегрирования являются алгоритмы Рунге-Кутты. Они используют аппроксимацию первых пяти членов ряда (4.42). Эти алгоритмы лежат в основе современных математических пакетов моделирования динамических систем, в частности, *Simulink* (приложение MatLab).

### 4.3. Эквивалентные преобразования в пространстве состояний

Ранее было показано, что для динамической системы можно построить несколько эквивалентных математических моделей в пространстве состояний. Возникает задача, как перейти от одной модели к другой и сколько таких моделей для системы можно построить. Данная задача решается с помощью так называемого метода эквивалентных преобразований (преобразования подобия).

#### 4.3.1. Преобразования подобия

Пусть система представлена в пространстве состояний следующими уравнениями:

$$\dot{X}_1 = A_1 X_1 + b_1 u, \quad (4.49a)$$

$$y = c_1^T X_1 + d_2 u. \quad (4.49б)$$

Для перехода к новому вектору переменных состояния  $X_2$  положим

$$X_2 = T X_1, \quad (4.50)$$

где  $T$  – матрица преобразования.

Уравнения состояния с вектором  $X_2$  имеют также стандартную форму:

$$\dot{X}_2 = A_2 X_2 + b_2 u, \quad (4.51a)$$

$$y = c_2^T X_2 + d_2 u. \quad (4.51б)$$

Разрешим соотношение (4.50) относительно вектора  $X_1$ :

$$X_1 = T^{-1} X_2,$$

и подставим его в уравнения (4.49).

В результате получим

$$T^{-1} \dot{X}_2 = A_1 T^{-1} X_2 + b_1 u,$$

$$y = c_1^T T^{-1} X_2 + d_2 u,$$

или после умножения слева уравнения состояния на матрицу  $T$  определим искомую математическую модель системы в форме (4.51):

$$\dot{X}_2 = T A_1 T^{-1} X_2 + T b_1 u, \quad (4.52a)$$

$$y = c_2^T X_2 + d_2 u. \quad (4.52б)$$

Из сравнения систем уравнений (4.51) и (4.52) получим соотношения перехода от одной модели в пространстве состояний к другой:

$$A_2 = T A_1 T^{-1}, \quad b_2 = T b_1, \quad c_2^T = c_1^T T^{-1}, \quad d_2 = d_1. \quad (4.53)$$

Анализ (4.53) показывает, что эквивалентные преобразования осуществимы только с помощью невырожденной матрицы преобразования  $T$ . Таким образом, произвольным выбором  $T$  можно получить неограниченное количество моделей в пространстве состояний. Однако в инженерной практике используют небольшое число моделей, в частности, физическую из-за возможности использования естественных координат и канонические формы, по которым удобнее осуществлять синтез систем и оценивать их свойства (управляемость, наблюдаемость и др.). Отсюда вывод – основная задача эквивалентного преобразования заключается в определении такой матрицы  $T$ , которая позволяет перейти к каноническим формам уравнений состояния.

Эквивалентные системы обладают следующими свойствами:

1. Характеристические уравнения у двух подобных систем равны.

Покажем это путём преобразования определителя (характеристического полинома) эквивалентной модели в пространстве состояний:

$$\begin{aligned} \det(sI - A_2) &= \det(sI - TA_1T^{-1}) = \\ &= \det(T) \det(sI - A_1) \det(T^{-1}) = \det(sI - A_1), \end{aligned}$$

т.е. определители матриц  $(sI - A_2)$ ,  $(sI - A_1)$  и соответствующие им характеристические уравнения равны.

Следствием этого свойства является следующее утверждение: собственные числа эквивалентных систем в пространстве состояний равны, то есть

$$\det(sI - A_1) = \det(sI - A_2) = \det(sI - \Lambda) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n),$$

где  $\Lambda$  - диагональная матрица с элементами из корней характеристического уравнения  $\lambda_i$ .

2. Определители матриц состояния  $\det A_i$  эквивалентных систем равны между собой, т.к.

$$\det A_2 = \det(TA_1T^{-1}) = \det T \det A_1 \det T^{-1} = \det A_1 = \dots = \det \Lambda = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

3. Следы матриц состояния эквивалентных систем равны. Это следует из (3.24):

$$\text{tr}(A_1) = \text{tr}(\Lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}(A_2),$$

где  $A_1, A_2$  и  $\Lambda$  – матрицы состояния эквивалентных систем.

4. Передаточные функции эквивалентных систем равны:

$$W(s) = c_2^T (sI - A_2)^{-1} b_2 + d_2 = c_1^T T^{-1} (sIT - T^{-1} - TA_1 T^{-1})^{-1} T b_1 + d_1 = \\ = c_1^T T^{-1} T (sI - A_1)^{-1} T^{-1} T b_1 + d_1 = c_1^T (sI - A_1)^{-1} b_1 + d_1.$$

*Пример 4.7.* Система задана в пространстве состояний четвёркой матриц:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad c_1^T = [0, 1], \quad d_1 = 2.$$

Положим, что матрица преобразования  $T$  равна

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{тогда} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

С помощью преобразований подобия (4.53) получим эквивалентную систему:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 12 & -10 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 11 \end{bmatrix}, \\ c_2^T = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = [-1 \quad 1], \quad d_2 = 2.$$

Проверим на основе этого примера выполнение ряда свойств преобразования подобия:

$$\det(sI - A_2) = \det \left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 12 & -10 \end{bmatrix} \right\} = \det \begin{bmatrix} s - 7 & 6 \\ -12 & s + 10 \end{bmatrix} = \\ = (s - 7)(s + 10) + 72 = s^2 + 3s + 2 = 0 = (s + 1)(s + 2) = 0, \\ \text{т.е. } \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2;$$

$$\det A_1 = \det A_2 = \lambda_1 \lambda_2 = 2; \quad \text{tr} A_1 = \text{tr} A_2 = \lambda_1 + \lambda_2 = -3.$$

Как было уже сказано, в теории автоматического управления чаще используются канонические формы уравнений состояния. Ранее рассмотренные КФВ, КФУ и ДКФ строились на основе исходного дифференциального уравнения или передаточной функции динамической системы. Однако остался открытым вопрос перехода от произвольной формы уравнений состояния к эквивалентным каноническим формам. Такую задачу можно решить для двух ещё не рассмотренных типов форм – канонической формы достижимости (КФД) и канонической формы наблюдаемости (КФН).



### 4.3.2. Каноническая форма достижимости

Расчётная модель КФД представлена на рис. 4.19.

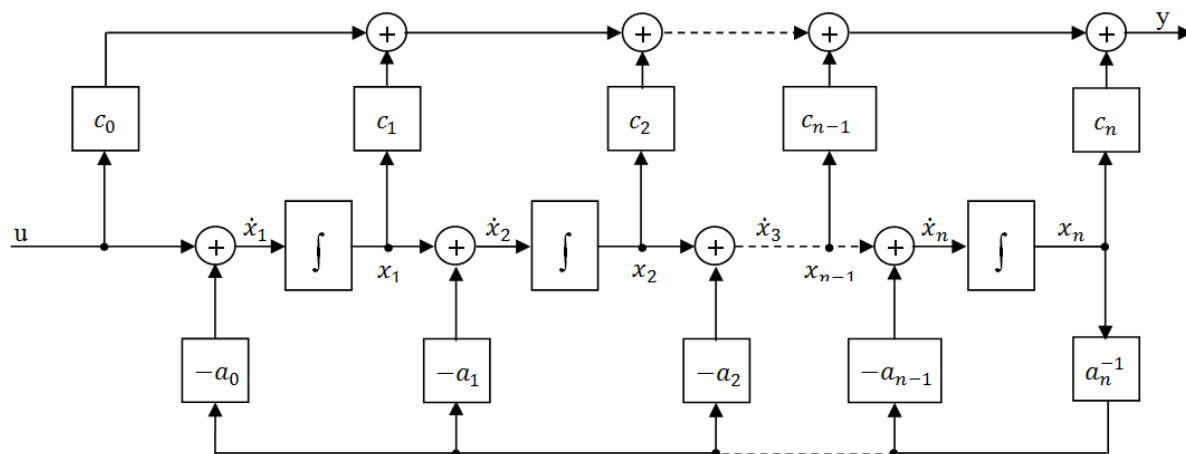


Рис. 4.19

В общем виде уравнения состояния КФД имеют стандартную форму

$$\dot{X}_D = A_D X_D + b_D u, \quad (4.54)$$

$$y = c_D^T X_D + d_D u, \quad (4.55)$$

где индекс  $D$  указывает на принадлежность матрицы и вектора состояния к КФД.

Нижняя часть РМ КФД аналогична структуре РМ КФВ. Она определяет матрицу состояния системы, вследствие чего можно положить  $A_D = A_k$ . С учётом этого и очевидности значения вектора  $b_D$  (рис. 4.19) для уравнений (4.54), (4.55) имеем в развёрнутом виде:

$$\dot{X}_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{a_0}{a_n} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\frac{a_1}{a_n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\frac{a_2}{a_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} X_D + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (4.56)$$

$$y = [c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, c_n] X_D + c_0 u. \quad (4.57)$$

В современной теории управления для анализа свойств САУ часто используют так называемую *матрицу управляемости*

$$Q = [b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b], \quad (4.58)$$

где  $n$  – порядок системы.

Особенность КФД заключается в том, что для этой формы

$$Q_D = [b_D, A_D b_D, A_D^2 b_D, \dots, A_D^{n-1} b_D] = I. \quad (4.59)$$

Это можно показать непосредственным перемножением матриц в (4.58).

Теперь можно перейти к определению матрицы преобразования  $T$  для перехода к КФД от произвольной системы уравнений состояния. Для этого запишем выражение, связывающее матрицу  $Q_D$  с матрицей управляемости исходной системы  $Q$ :

$$Q_D = [Tb, TAT^{-1}b, TA^2T^{-1}b, \dots, TA^{n-1}T^{-1}b] = TQ = I, \quad (4.60)$$

откуда

$$T^{-1} = Q = [b, Ab, \dots, A^{n-1}b], \quad (4.61)$$

или

$$T = Q^{-1}. \quad (4.62)$$

Таким образом, для перехода к КФД достаточно определить матрицу управляемости исходной системы  $Q$ . Эта процедура не представляет затруднений. Последние возникают при вычислении матрицы  $Q^{-1}$ , но эту операцию в настоящее время выполняют с использованием какой-либо программной среды, например в MatLab с помощью функции *inv()*.

После определения матриц  $T^{-1}$ ,  $T$  можно рассчитать по формулам преобразования подобия (4.53) искомые  $A_D$ ,  $b_D$ ,  $c_D^T$ ,  $d_D$ . Здесь следует заметить, что выражения  $b_D$  и  $d_D$  не требуется вычислять, так как из уравнений (4.56)÷(4.57) следует, что они имеют стандартную структуру:

$$b_D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d_D = d = c_0.$$

Собственно, основные вычисления при определении КФД связаны с определением вектора  $c_D^T$ :

$$c_D^T = c^T T^{-1}, \quad (4.63)$$

где  $c^T$  – вектор выхода уравнений состояния исходной системы.

Структура матрицы  $A_D$  так же известна (4.56), требуется только вычислить её коэффициенты  $a_i/a_n$ . Они являются коэффициентами характеристического уравнения  $|sI - A| = 0$ , которое можно получить применяя алгоритм Фаддеева-Леверье.

*Пример 4.8.* Определить матрицы КФД по исходной системе уравнений состояния, которая была получена ранее для электродвигателя постоянного тока в виде КФУ с матрицами

$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T_\exists T_M} & -\frac{1}{T_\exists} \end{bmatrix}, \quad b_r = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{T_\exists T_M} \end{bmatrix}, \quad c_r^T = [-k_c, -k_c T_\exists], \quad d_r = 0.$$

В соответствии с (4.61) получим сначала

$$T^{-1} = [b_r, A_r b_r] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{T_\exists T_M} \\ \frac{1}{T_\exists T_M} & -\frac{1}{T_M T_\exists^2} \end{bmatrix},$$

затем по (4.63) определим

$$c_D^T = c_r^T T^{-1} = [-k_c, -k_c T_\exists] \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{T_\exists T_M} \\ \frac{1}{T_\exists T_M} & -\frac{1}{T_\exists^2 T_M} \end{bmatrix} = \left[ -\frac{k_c}{T_M}, 0 \right].$$

Выражения для  $b_D$  и  $d_D$  очевидны:

$$b_D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d_D = d_r = 0.$$

Матрицу  $A_D$  определим с использованием характеристического уравнения

$$|sI - A_r| = \begin{vmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T_\exists T_M} & -\frac{1}{T_\exists} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s & -1 \\ \frac{1}{T_\exists T_M} & s + \frac{1}{T_\exists} \end{vmatrix} = s^2 + \frac{1}{T_\exists} s + \frac{1}{T_\exists T_M} = 0,$$

из которого следует, что  $a_2 = 1$ ,  $a_1 = 1/T_\exists$ ,  $a_0 = 1/T_\exists T_M$  и соответственно

$$A_D = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_0}{a_2} \\ 1 & -\frac{a_1}{a_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{T_\exists T_M} \\ 1 & -\frac{1}{T_\exists} \end{bmatrix}.$$

### 4.3.3. Каноническая форма наблюдаемости

Расчетная модель КФН приведена на рис.4.20.

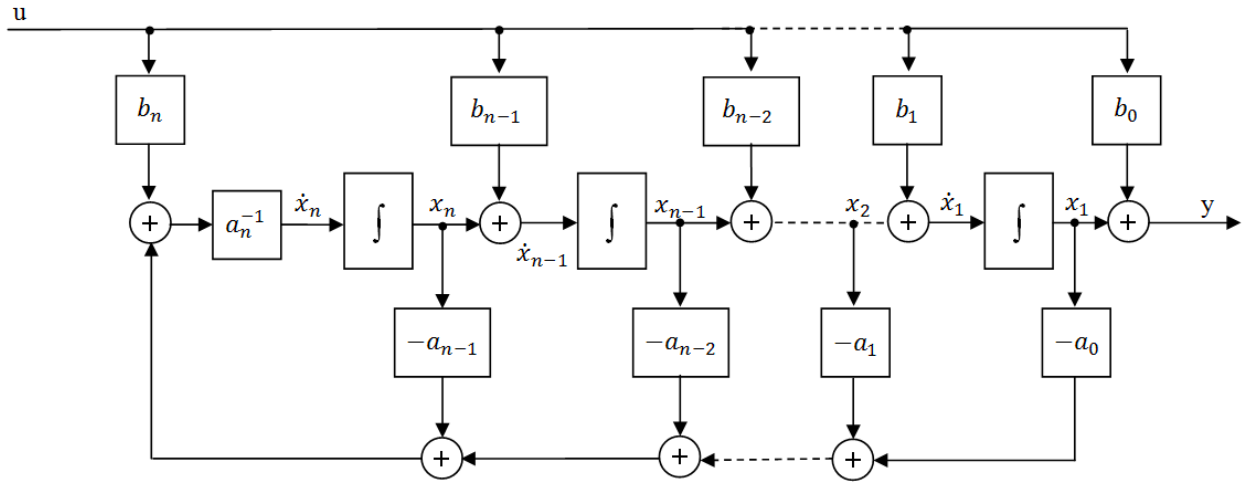


Рис. 4.20

Введём индексацию уравнений состояния этой формы в следующем виде:

$$\dot{X}_p = A_p X_p + b_p u, \quad (4.64)$$

$$y = c_p^T X_p + d_p u, \quad (4.65)$$

где  $p$  говорит о принадлежности матриц и векторов к КФН. Анализ структуры РМ КФН показывает, что её нижняя часть идентична РМ КФУ. Отсюда следует:

$$A_p = A_r. \quad (4.66)$$

Структура КФН позволяет записать уравнения состояния в развёрнутой форме в следующем виде:

$$\dot{X}_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} X_p + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ \frac{b_n}{a_n} \end{bmatrix} u, \quad (4.67)$$

$$y_p = [1, 0, \dots, 0] X_p + b_0 u. \quad (4.68)$$

Отсюда следует, что по существу переход к КФН сводится определению  $b_p$  по выражению

$$b_p = T b, \quad (4.69)$$

где  $b$  – вектор входа исходной системы;  $T$  – матрица преобразования.

Коэффициенты матрицы  $A_p$  можно определить также, как и для КФД через характеристическое уравнение, а значения  $c_p^T$  и  $d_p$  вычислять не требуется, так как  $c_p^T = [1, 0, \dots, 0]$ ,  $d_p = d$ .

Для определения  $T$  будем использовать так называемую *матрицу наблюдаемости*, которая в общем случае имеет следующий вид:

$$P = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ c^T A^2 \\ \dots \\ c^T A^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (4.70)$$

Для КФН эта матрица равна

$$P_p = \begin{bmatrix} c_p^T \\ c_p^T A_p \\ c_p^T A_p^2 \\ \dots \\ c_p^T A_p^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Эта особенность позволяет получить простое соотношение для матрицы  $T$  с использованием преобразования подобия:

$$P_p = \begin{bmatrix} c^T T^{-1} \\ c^T A T^{-1} \\ c^T A^2 T^{-1} \\ \dots \\ c^T A^{n-1} T^{-1} \end{bmatrix} = P T^{-1} = I.$$

Отсюда

$$T = P, \quad (4.71)$$

где  $P$  – матрица наблюдаемости исходной системы.

*Пример. 4.9.* Получить матрицы КФН по матрицам системы уравнений состояния в форме КФУ, приведённых в примере 4.8.

Определим сначала матрицу преобразования  $T$ :

$$T = P = \begin{bmatrix} c_r^T \\ c_r^T A_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_c & -k_c T_3 \\ \frac{k_c}{T_M} & 0 \end{bmatrix},$$

а затем вектор  $b_p$  по соотношению (4.69):

$$b_p = T b_r = \begin{bmatrix} -k_c & -k_c T_3 \\ \frac{k_c}{T_M} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{T_3 T_M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{k_c}{T_M} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В рассматриваемой задаче структуры матриц  $A_p$  и  $A_r$  одинаковые, поэтому

$$A_p = A_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T_3 T_M} & -\frac{1}{T_3} \end{bmatrix}.$$

Значения  $c_p^T$  и  $d_p$  для КФН очевидны:

$$c_p^T = [1 \ 0], \quad d_p = d_r = 0.$$

Анализ рассмотренных примеров показывает, что формы КФД и КФН дуальны друг другу, т.е.

$$A_p = A_D^T, \quad b_p = c_D, \quad c_p^T = b_D^T, \quad d_p = d_D. \quad (4.72)$$

Таким образом, определив одну из этих форм, другую можно получить по соотношениям (4.72).

#### 4.3.4. Переход от канонических форм уравнений состояния к форме ДКФ

Если в качестве исходной системы используются уравнения состояния в канонических формах КФВ, КФУ, КФД и КФН, то для перехода к диагональной канонической форме в качестве матрицы преобразования  $T$  рекомендуется использовать матрицы Вандермонда [1]. Это возможно только в случае действительных некрратных собственных чисел матрицы состояния исходной системы.

Если в качестве исходной системы используются уравнения состояния в формах КФВ или КФД, то матрица преобразования формируется в следующем виде:

$$T = V = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}, \quad (4.73)$$

где  $\lambda_i$  - собственные числа матрицы состояния.

Рассмотрим этот способ на основе примера перехода к форме ДКФ от уравнений состояния в форме КФД со следующей четверкой матриц:

$$A_D = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}; \quad b_D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad c_D^T = [2 \ 1]; \quad d_D = 2.$$

Сначала определим собственные значения матрицы  $A_D$  из характеристического уравнения:

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} \lambda & 2 \\ -1 & \lambda + 3 \end{bmatrix} \right| = 0; \text{ или } \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0.$$

Таким образом, собственные числа матрицы  $A_D$  равны:  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -2$ . Составим матрицу Вандермонда и обратную для нее матрицу  $V^{-1}$ :

$$V = T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}; \quad V^{-1} = T^{-1} = \frac{1}{\det T} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Теперь используя формулы эквивалентного преобразования, получим матрицы диагональной канонической формы:

$$A_J = T A_D T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad d_J = d_D = 2;$$

$$b_J = T b_D = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad c_J^T = c_D^T T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Если в качестве исходных моделей в пространстве состояний заданы модели в форме КФН или КФУ, то матрицу Вандермонда используют в транспонированном виде:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (4.74)$$

При этом в формулах эквивалентных преобразований необходимо сделать подстановку  $T = V^{-1}$  и  $T^{-1} = V$ .

*Пример 4.10.* Определить уравнения состояния в форме ДКФ на основе уравнений состояния в форме КФН, матрицы которой получены с использованием свойства дуальности последней и формы КФД:

$$A_P = A_D^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}; \quad b_P = c_D = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad c_P^T = b_D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad d_P = d_D = 2.$$

Исходя из свойства эквивалентности собственные числа матриц  $A_P$  и  $A_D$ , равны. Поэтому сразу составим матрицу Вандермонда по соотношению (4.74) и определим обратную для нее матрицу  $V^{-1}$ :

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}; \quad V^{-1} = \frac{1}{\det V} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Далее с учетом сделанного выше замечания по правилу вычисления матрицы преобразования  $T$  для формы КФН ( $T = V^{-1}$  и  $T^{-1} = V$ ) имеем:

$$A_J = V^{-1}A_P V = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad d_J = d_D = 2;$$

$$b_J = V^{-1}b_P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}; \quad c_J^T = c_P V = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = [1 \quad 1].$$

Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод об их эквивалентности, хотя значения векторов  $b_J$  и  $c_J$  поменялись местами. В диагональной форме это не играет роли, так как в этой форме значения элементов  $b_{ji}$ ,  $c_{ji}$  можно перераспределять между векторами  $b_J$  и  $c_J$  при выполнении условия  $b_{ji} c_{ji} = const$ .

Рассмотренный метод Вандермонда дает возможность сформировать рекомендации по диагонализации уравнений состояния. Если исходная система задана дифференциальным уравнением или передаточной функцией, то сначала необходимо перейти к канонической форме КФВ или КФУ. Если система представлена в пространстве состояний не в канонической форме, то тогда, используя матрицы управляемости или наблюдаемости следует осуществить переход соответственно к каноническим формам КФД или КФН. Затем для непосредственной диагонализации полученной системы уравнений состояния можно использовать рассмотренный выше подход, базирующийся на применении матриц Вандермонда.

### **Упражнения к главе 4**

4.1. Составить уравнения состояния методом интегрирования старшей производной для динамической системы, которая описывается передаточной функцией:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s}.$$

4.2. Получить уравнения состояния в форме КФВ для системы, заданной дифференциальным уравнением следующего вида:

$$y^{(3)}(t) + 6y^{(2)}(t) + 5y^{(1)}(t) = 2u^{(2)}(t) + 3u^{(1)}(t) + 10.$$

4.3. Определить уравнения состояния в форме КФУ для динамической системы, передаточная функция которой имеет кратные полюсы:

$$W(s) = \frac{10(2s + 1)}{(5s + 1)^2(s + 1)}.$$

4.4. Получить уравнения состояния в форме ДКФ для систем, которые заданы следующими передаточными функциями:



$$\text{a) } W(s) = \frac{15(4s + 1)}{(5s + 1)(s^2 + 6s + 8)} ;$$

$$\text{б) } W(s) = \frac{5(5s + 1)}{(2s + 1)^2(4s + 1)} ;$$

$$\text{в) } W(s) = \frac{15(4s + 1)}{s(s^2 + 4s + 8)} .$$

4.5. Определить матрицу перехода методом Фаддеева-Левере по матрице состояния:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

4.6. Определить передаточную функцию системы, заданной следующими уравнениями состояния:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{T_3 T_M} \\ 1 & -\frac{1}{T_3} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} -k_c \\ -k_c T_3 \end{bmatrix} u ,$$

$$y = \left[ 0, \quad \frac{1}{T_3 T_M} \right] X + 0u .$$

4.7. Показать, что для канонической формы КФД матрица управляемости  $Q_D$  равна единичной диагональной матрице, т.е.

$$Q_D = [b_D, A_D b_D, A_D^2 b_D, \dots, A_D^{n-1} b_D] = I .$$

4.8. Определить матрицы уравнений состояния в форме КФД по исходной системе уравнений состояния, приведенной в упражнении 4.6.

4.9. Показать, что матрица наблюдаемости для канонической формы КФН определяется следующим соотношением:

$$Q_p = [c_p^T, c_p^T A_p, c_p^T A_p^2, \dots, c_p^T A_p^{n-1}] = I .$$

4.10. Осуществить переход к диагональной канонической форме уравнений состояния с применением матрицы преобразования Вандермонда от системы уравнений состояния в форме КФВ:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{T_1 T_2} \\ 1 & -\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} k \\ T_3 \end{bmatrix} u ,$$

$$y = \left[ 0, \quad \frac{1}{T_1 T_2} \right] X + 0u .$$

4.11. Определить четверку матриц в форме КФН по уравнениям состояния, приведенных в упражнении 4.6.

### *Контрольные вопросы к главе 4*

4.1. Приведите уравнения состояния в стандартной форме и дайте определения векторам и матрицам этих уравнений.

4.2. Из каких блоков состоит расчетная модель динамической системы в пространстве состояний?

4.3. В чем заключается процедура построения расчетной модели методом интегрирования старшей производной?

4.4. Какая матрица в уравнениях состояния определяет динамические свойства системы?

4.5. Как определить порядок системы по уравнению состояния?

4.6. Поясните, в чем заключается удобство использования канонических форм КФВ и КФУ для получения уравнений состояния динамических систем?

4.7. Как связаны между собой канонические формы КФВ и КФУК?

4.8. Как перейти от дифференциального уравнения к каноническим формам КФВ и КФУ?

4.9. Как получить коэффициенты матриц уравнений состояния в диагональной форме по передаточной функции динамической системы?

4.10. Какой вид будет иметь матрица состояния в форме ДКФ, если ПФ исходной системы содержит комплексно-сопряженные полюсы?

4.11. Какой вид имеет матрица состояния в форме ДКФ при наличии кратных вещественных полюсов?

4.12. Как получить переходную матрицу в функции времени на основе матрицы перехода в операторной форме?

4.13. В чем заключается достоинство алгоритма Фаддеева-Леверье?

4.14. Приведите основные свойства матричного экспоненциала.

4.15. Какие приближенные методы решения уравнений состояния Вы знаете?

4.16. Какому условию должна удовлетворять матрица преобразования для однозначного перехода к другому вектору состояния?

4.17. Назовите основные свойства эквивалентных систем.

4.18. Приведите выражение для матрицы управляемости.

4.19. Чему равна матрица управляемости для динамической системы, представленной в канонической форме достижимости?

4.20. Какими соотношениями связаны матрицы уравнений состояния эквивалентных систем?

4.21. Каким выражением определяется матрица преобразования для перехода к канонической форме КФД?

4.22. По какому соотношению определяется матрица наблюдаемости динамической системы?

4.23. Чему равна матрица наблюдаемости для канонической формы КФН?

4.24. По какому выражению определяется матрица преобразования для перехода к канонической форме КФН?

4.25. Какой вид имеет матрица преобразования Вандермонда, если в качестве исходной системы используются уравнения состояния в формах КФД и КФВ?

4.26. Как определяется матрица преобразования при переходе к диагональной форме от уравнений состояния в формах КФУ и КФН?

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аракелян Э.К., Пикина Г.А. Оптимизация и оптимальное управление: Учебное пособие / Под ред. Т.Е. Щедриковой. – М.: Издательство МЭИ, 2003. – 356 с.: ил.
2. Беллман Р. Введение в теорию матриц. – 2-е изд., - М.: Издательство «Наука». Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1976. – 352 с.: ил.
3. Гайдук, А.Р., Беляев В.Е., Пьявченко Т.А. Теория автоматического управления в примерах и задачах с решениями в MATLAB: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2011. — 464 с.: ил.
4. Математические основы теории автоматического управления: Учеб. пособие: В 3-х т./ В.А. Иванов, В.С. Медведев, Б.К. Чемоданов, А.С. Ющенко; Под ред. Б.К. Чемоданова. - 3-е изд., перераб. и доп. – Т. 1. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 552 с.: ил.
5. Математические основы теории автоматического управления: Учеб. пособие: В 3-х т./ В.А. Иванов, В.С. Медведев, Б.К. Чемоданов, А.С. Ющенко; Под ред. Б.К. Чемоданова. - 3-е изд., перераб. и доп. – Т. 2. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. – 616 с.: ил.
6. Математические основы теории автоматического управления: Учеб. пособие: В 3-х т./ В.А. Иванов, В.С. Медведев, Б.К. Чемоданов, А.С. Ющенко; Под ред. Б.К. Чемоданова. - 3-е изд., перераб. и доп. – Т. 3. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. – 352 с.: ил.
7. Мирошник И.В. Теория автоматического управления. Линейные системы: Учеб. пособие: – СПб.: Питер, 2005. – 336 с.: ил.
8. Перельмуттер В.М. Пакеты расширения MATLAB. Control System Toolbox и Robust Control Toolbox. – М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2008. – 224 с.: ил. – (Серия «Библиотека профессионала»).
9. Стрейц В. Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления / Пер. с англ. Под ред. Я.З. Цыпкина. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1985. – 296 с.: ил.
10. Теория автоматического управления: учеб. для вузов / под ред. проф. В.Б. Яковлева. – 3-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2009. – 567 с.: ил.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	3
Глава 1. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ АНАЛИЗЕ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ.....	6
1.1. Преобразование Лапласа .....	6
1.1.1 Прямое преобразование Лапласа .....	6
1.1.2. Свойства преобразования Лапласа .....	8
1.1.3. Обратное преобразование Лапласа .....	13
1.2. Применение преобразования Лапласа для исследования систем автоматического управления .....	16
1.2.1 Операторный метод решения дифференциальных уравнений ...	16
1.2.2. Получение передаточных функций динамических звеньев и систем.....	19
1.2.3. Применение передаточных функций для описания систем автоматического управления .....	24
1.2.4. Применение передаточных функций для определения динамических процессов в САУ .....	31
Глава 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И РЯДЫ ФУРЬЕ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ .....	37
2.1. Преобразование Фурье .....	37
2.1.1. Общие сведения о преобразовании Фурье .....	37
2.1.2. Применение преобразования Фурье .....	38
2.2. Ряды Фурье .....	41
2.2.1. Общие сведения о периодических функциях .....	41
2.2.2. Разложение периодической функции в ряд Фурье .....	43
2.2.3. Разложение непериодической функции .....	47
2.2.4. Частотные спектры периодической функции .....	50
Глава 3. ЭЛЕМЕНТЫ МАТРИЧНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ И ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ .....	55
3.1. Общие сведения о матрицах .....	55
3.1.1. Основные понятия и определения .....	55
3.1.2. Простейшие матричные операции .....	56
3.1.3. Определители .....	57
3.1.4. Обращение матрицы .....	59
3.2. Векторы и линейные пространства .....	61
3.2.1. Векторы .....	61

3.2.2. Линейное векторное пространство .....	63
3.2.3. Линейные преобразования в линейных пространствах .....	67
Глава 4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ .....	74
4.1. Математические модели динамических систем в пространстве состояний .....	74
4.1.1. Общие сведения о методе пространства состояний .....	74
4.1.2. Расчётные модели в пространстве состояний .....	76
4.1.3. Каноническая форма восстанавливаемости .....	81
4.1.4. Каноническая форма управляемости .....	84
4.1.5. Диагональная каноническая форма .....	87
4.2. Решение уравнений состояния .....	93
4.2.1. Операторный метод решения уравнений состояния .....	94
4.2.2. Методы вычисления матрицы перехода .....	95
4.2.3. Решение уравнений состояния в функции времени .....	98
4.3. Эквивалентные преобразования в пространстве состояний .....	102
4.3.1. Преобразования подобия .....	102
4.3.2. Каноническая форма достижимости .....	105
4.3.3. Каноническая форма наблюдаемости .....	108
4.3.4. Переход от канонических форм уравнений состояния к форме ДКФ .....	110
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	116

*Учебное пособие*

*БУДИН Владимир Иванович*

**Математические основы автоматки и управления**

Редакторы:

*Е.С. Захарова*

*И. А. Назарова*

Подписано в печать 29.06.2016г.  
Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная  
Усл. п. л. 7 Уч.-изд. л. 5,5  
Тираж 100 экз. Рег. № 7/16sf

---

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Самарский государственный технический университет»  
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Главный корпус

Отпечатано в типографии  
Самарского государственного технического университета  
Филиал в г. Сызрани, 446001, г. Сызрань, ул. Советская 45