МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Общетеоретических дисциплин»

И. П. ЕГОРОВА
С. М. БОГДАНОВА

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие

Самара
Самарский государственный технический университет
2013

Печатается по решению редакционно-издательского совета СамГТУ

УДК 517.91:517.92:517.94

Егорова И.П., Богданова С.М.

Высшая математика. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учеб. пособие / *И.П. Егорова, С.М. Богданова..* – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2013. – 201 с.: ил.

Учебное пособие «Высшая математика. Обыкновенные дифференциальные уравнения» представляет собой учебное пособие по теме «Обыкновенные дифференциальные уравнения» для выполнения типового расчета по «Математике» студентами технических специальностей вуза.

Данное пособие содержит общие теоретические сведения о дифференциальных уравнениях и методы интегрирования отдельных типов уравнений первого и высших порядков, а также систем дифференциальных уравнений. Изложение сопровождается многочисленными обстоятельно разобранными примерами. Уделено внимание задачам из механики, физики и электротехники, требующих составления и решения дифференциальных уравнений.

УДК 517.91:517.92:517.94

Р е ц е н з е н т ы : канд. физ.-мат. наук, доцент В.Б. К и с л и н с к и й ,
канд. физ.-мат. наук, доцент А.П. Ч у р и к о в

ПРЕДИСЛОВИЕ

Материал учебного пособия изложен в соответствии с учебной программой по дисциплине «Математика» и содержит необходимые теоретические и практические сведения, а также методы решения задач индивидуального домашнего задания (ИДЗ) по разделу «Обыкновенные дифференциальные уравнения».

Основные вопросы указанного раздела изложены достаточно полно, особое место отводится решению линейных дифференциальных уравнений и систем, а также их применению в механике и теории электрических цепей.

Задачи ИДЗ данных методических указаний частично соответствуют учебному пособию Л.А.Кузнецова «Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты» издательства «Лань», 2005г.

Сборник задач «Высшая математика. Обыкновенные дифференциальные уравнения» предназначены для студентов направлений бакалавриата дневной, вечерней и заочной форм обучения.

ВВЕДЕНИЕ

Активная самостоятельная работа студентов – залог успешного овладения изучаемым учебным материалом. Одной из форм активизации учебного процесса по математике служит система типовых расчетов (ТР) или индивидуальных домашних заданий (ИДЗ). Применение системы ТР рекомендовано действующей программой по математике для направлений бакалавриата.

Требования к выполнению ТР:

1. Задание получает индивидуально каждый студент. Номер варианта студента соответствует его порядковому номеру в журнале преподавателя.

2. Типовые задания выполняются на листах формата А4, сложенных в прозрачный файл и папку-скоросшиватель.

3. Условия заданий переписываются полностью. При решении задач делаются ссылки на используемые теоремы и формулы. В конце решения записывается ответ или делается вывод.

4. Завершающим этапом является защита студентом ТР, во время защиты студент должен отвечать на теоретические вопросы и давать объяснения по решению задач.

Приступая к решению задач ИДЗ, необходимо повторить следующее:

1. Основные понятия теории дифференциальных уравнений. Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка. Формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Общее и частное решения.

2. Дифференциальные уравнения первого порядка: с разделяющимися переменными, однородные и приводящиеся к ним.

3. Линейные уравнения первого порядка, уравнение Бернулли.

5. Уравнения в полных дифференциалах.

6. Приближенное интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка методом изоклин, методом Эйлера.

7. Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

8. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.

9. Линейное однородное дифференциальное уравнение. Фундаментальная система решений. Структура общего решения.

10. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение. Структура общего решения.

11. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных.

12. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Метод подбора.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1.1. Основные понятия.

Определение. **Уравнение**

$$F(x; y; y') = 0, \tag{1.1}$$

связывающее между собой независимую переменную x, искомую (неизвестную) функцию $y(x)$ и её производную $y'(x)$ называется дифференциальным уравнением первого порядка.

Если уравнение (1.1) можно записать в виде

$$y' = f(x; y),$$

то говорят, что оно разрешимо относительно производной. Это уравнение иногда записывают в виде

$$dy = f(x; y)dx$$

или более общно,

$$P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0$$

– дифференциальная форма.

Определение. **Решением (или интегралом) дифференциального уравнения первого порядка называется любая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в это уравнение обращает его в тождество.**

График функции $y = \varphi(x)$ в этом случае называется интегральной кривой.

Процесс нахождения решений данного дифференциального уравнения называется интегрированием этого уравнения.

Задача отыскания решения дифференциального уравнения первого порядка (1.1), удовлетворяющего заданному начальному условию $y(x_0) = y_0$, называется задачей Коши.

Геометрически это равносильно следующему:
требуется найти интегральную кривую уравнения (1.1), проходящую

через точку $M_0(x_0; y_0)$.

Определение. **Общим решением уравнения (1.1) называется такая функция**

$$y = \varphi(x; C), \tag{1.2}$$

где С – произвольная постоянная, что:

1) при любом конкретном C она является решением этого уравнения;

2) для любого допустимого начального условия $y(x_0) = y_0$ найдется такое значение постоянной $C = C_0$, что

$$\varphi(x_0; C_0) = y_0.$$

В некоторых случаях общее решение дифференциального уравнения приходится записывать в неявном виде:

$$\Phi(x; y; C) = 0.$$

Тогда соотношение $\Phi(x; y; C) = 0$ называется общим интегралом этого уравнения.

Геометрически общее решение (общий интеграл) представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости Оху.

Определение. **Частным решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = \varphi(x; C_0)$, получаемая из общего решения (1.2) при конкретном значении постоянной $C = C_0$.**

Частным интегралом уравнения (1.1) называется равенство $\Phi(x; y; C_0) = 0$, получаемое из общего интеграла при фиксированном значении С.

***Теорема.* (*Существования и единственности решения задачи Коши*). Если в уравнении $y' = f(x; y)$ функция $f(x; y)$ и её частная производная $f_y'(x; y)$ непрерывны в некоторой области D плоскости Оху, содержащей точку $M_0(x_0; y_0)$, то существует и притом единственное решение $y = y(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.**

Некоторые дифференциальные уравнения могут иметь такие решения, которые не получаются из общего ни при каких значениях произвольной постоянной. Эти решения не являются частными и поэтому называются особыми. Особые решения могут иметь только те уравнения, для которых нарушаются условия теоремы существования и единственности решения.

1.2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

Определение. **Уравнение вида**

$$P_1(x)\cdot Q_1(y)dx + P_2(x)\cdot Q_2(y)dy = 0, \tag{1.3}$$

называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

Уравнение (1.3) путем деления на произведение $Q_1(y)\cdot P_2(x)$ приводится к уравнению с разделенными переменными

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = 0 \tag{1.4}$$

(коэффициент при dx зависит только от x, а при dy – только от y).

Общий интеграл полученного уравнения находится почленным интегрированием:

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = C.$$

Заметим, что уравнению (1.3) могут удовлетворять решения, потерянные при делении на $Q_1(y)\cdot P_2(x)$, т.е. получаемые из уравнения $Q_1(y)\cdot P_2(x) = 0$. Если эти решения не входят в найденный общий интеграл, то они являются особыми решениями уравнения (1.3).

Описанный прием используется при решении задачи №1.

Пример 1.31.

Найти общий интеграл дифференциального уравнения. (Ответ представить в виде $\psi(x; y) = C$):

$$20xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 5xy^2dx.$$

Решение.

Сгруппируем слагаемые уравнения относительно дифференциалов dx, dy и вынесем общие множители за скобки:

$$3x^2 ydy + 3ydy = 20xdx + 5xy^2 dx,$$

$$3y\left(x^2+1\right)dy = 5x\left(4+y^2\right)dx.$$

Имеем уравнение с разделяющимися переменными; разделим уравнение на $\left(x^2+1\right)\neq 0$, $\left(4+y^2\right)\neq 0$, получим равенство дифференциалов:

$$\frac{3y}{4+y^2}dy = \frac{5x}{x^2+1}dx.$$

Интегрируя, находим:

$$3\int\frac{ydy}{4+y^2} = 5\int\frac{xdx}{x^2+1},$$

$$3\cdot\frac{1}{2}\ln\left|y^2+4\right| = 5\cdot\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + \frac{1}{2}\ln|C|,$$

$$\ln\left|y^2+4\right|^3 - \ln\left|x^2+1\right|^5 = \ln|C|,$$

$$\frac{\left(y^2+4\right)^3}{\left(x^2+1\right)^5} = C.$$

Это общий интеграл данного дифференциального уравнения.

1.3. Однородные дифференциальные уравнения.

***Определение.* Функция $f(x;y)$ называется однородной функцией *n*-го измерения, где n – целое, если при любом λ имеет место тождество**

$$f(\lambda x;\lambda y) = \lambda^n f(x;y).$$

В частности, функция $f(x;y)$ – однородная нулевого измерения, если: $f(\lambda x;\lambda y) = f(x;y)$.

***Определение.* Дифференциальное уравнение вида**

$$P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0, \qquad (1.5)$$

называется однородным, если $P(x; y)$ и $Q(x; y)$ – однородные функции одного и того же измерения.

Уравнение (1.5) может быть приведено к виду

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1.6}$$

Однородное уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными при помощи замены переменной $\frac{y}{x} = t$, т.е. $y = x \cdot t,\ y' = x \cdot t' + t$, где $t = t(x)$ – новая неизвестная функция (можно также применять подстановку $\frac{x}{y} = t$).

Этим методом решается задача № 2, данного учебного пособия.

Пример 2.31.

Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$y' = \frac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy}.$$

Решение.

Рассмотрим функцию

$$f(x; y) = \frac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy} = \frac{x^2\left(1 + 2\frac{y}{x} - 5\frac{y^2}{x^2}\right)}{x^2\left(2 - 6\frac{y}{x}\right)} = \frac{1 + 2\frac{y}{x} - 5\frac{y^2}{x^2}}{2 - 6\frac{y}{x}} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Т.к. $f(x; y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, то $f(x; y)$ – однородная функция нулевого измерения. Тогда исходное дифференциальное уравнение однородное относительно x и y.

Положим $y = tx$; $y' = t'x + x't = t'x + t$. Подставим y и y' в исходное уравнение

$$t'x + t = \frac{x^2 + 2x \cdot tx - 5(tx)^2}{2x^2 - 6x \cdot tx};$$

$$t'x+t=\frac{x^2\left(1+2t-5t^2\right)}{x^2(2-6t)};$$

$$t'x=\frac{1+2t-5t^2}{2-6t}-t;$$

$$t'x=\frac{1+2t-5t^2-2t+6t^2}{2-6t};$$

$$\frac{dt}{dx}\cdot x=\frac{t^2+1}{2(1-3t)}.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные и проинтегрируем уравнение

$$\frac{2(1-3t)}{t^2+1}dt=\frac{dx}{x};$$

$$2\int\frac{1-3t}{t^2+1}dt=\int\frac{1}{x}dx;$$

$$2\int\frac{1}{t^2+1}dt-6\int\frac{t}{t^2+1}dt=\int\frac{1}{x}dx;$$

$$2\operatorname{arctg}t-6\cdot\frac{1}{2}\ln\left|t^2+1\right|=\ln|x|+\ln|C|;$$

$$2\operatorname{arctg}t=3\ln\left|t^2+1\right|+\ln|x\cdot C|;$$

$$2\operatorname{arctg}t=\ln\left|C\cdot x\left(t^2+1\right)^3\right|.$$

Возвращаясь к переменной y, $t=\dfrac{y}{x}$ найдём общий интеграл

$$2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln\left|C\cdot x\left(\frac{y}{x^2}^2+1\right)^3\right|;$$

$$2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln\left|\frac{C\cdot\left(y^2+x^2\right)^3}{x^5}\right|.$$

Замечание. Уравнение вида $y'=f\left(\dfrac{ax+bx+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ приводится к однородному с помощью замен $x = u + \alpha$; $y = v + \beta$, где числа α и β удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} a \cdot \alpha + b \cdot \beta + c = 0, \\ a_1 \cdot \alpha + b_1 \cdot \beta + c_1 = 0. \end{cases}$$

Используем замечание при решении задачи № 3.

Пример 3.31.

Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$y' = \frac{y + 2}{2x + y - 4}.$$

Решение.

Исходное уравнение приводится к однородному, а затем к уравнению с разделяющимися переменными. Для этого введём новые переменные u и v вместо x и y. Положим

$$\begin{cases} x = u + \alpha, \\ y = v + \beta. \end{cases}$$

тогда $\begin{cases} dx = du, \\ dy = dv, \end{cases}$ и уравнение примет вид

$$\frac{dv}{du} = \frac{v + \beta + 2}{2(u + \alpha) + (v + \beta) - 4};$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{v + (\beta + 2)}{2u + v + (2\alpha + \beta - 4)}.$$

Выберем α и β так, чтобы удовлетворялась система уравнений

$$\begin{cases} \beta + 2 = 0, \\ 2\alpha + \beta - 4 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -2, \\ \alpha = 3. \end{cases}$$

Получим однородное уравнение

$$\frac{dv}{du} = \frac{v}{2u + v}.$$

Введём новую переменную: $v = tu$, а значит $\frac{dv}{du} = u\frac{dt}{du} + t$. Тогда

$$u\frac{dt}{du} + t = \frac{tu}{2u + tu};$$

$$u\frac{dt}{du}=\frac{ut}{u(2+t)}-t;$$

$$u\frac{dt}{du}=\frac{t}{2+t}-t;$$

$$u\frac{dt}{du}=\frac{t-2t-t^2}{2+t};$$

$$u\frac{dt}{du}=\frac{-t-t^2}{2+t}.$$

Разделим переменные и проинтегрируем

$$\frac{2+t}{t+t^2}dt=-\frac{du}{u};$$

$$\int\frac{t+2}{t^2+t}dt=-\int\frac{du}{u}.$$

Разложим на простейшие дроби подынтегральную функцию первого интеграла

$$\frac{t+2}{t(t+1)}=\frac{(t+1)+1}{t(t+1)}=\frac{(t+1)}{t(t+1)}+\frac{1}{t(t+1)}=\frac{1}{t}+\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}=\frac{2}{t}-\frac{1}{t+1}.$$

Тогда интеграл будет иметь вид

$$\int\frac{t+2}{t^2+t}dt=\int\left(\frac{2}{t}+\frac{-1}{t+1}\right)dt=2\ln|t|-\ln|t+1|+C.$$

Следовательно, решением дифференциального уравнения будет общий интеграл:

$$2\ln|t|-\ln|t+1|=-\ln|u|+\ln|C|;$$

$$\ln\left|\frac{t^2}{t+1}\right|+\ln|u|=\ln(C);$$

$$\frac{t^2u}{t+1}=C.$$

Возвращаясь к прежним переменным x и y $\left(t=\frac{v}{u}\right)$, получим

$$\frac{\left(\frac{v}{u}\right)^2 u}{\frac{v}{u}+1}=C \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{v+u}=C.$$

Т.к. $\begin{cases} x=u+3, \\ y=v-2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=x-3, \\ v=y+2. \end{cases}$; окончательно: $\dfrac{(y+2)^2}{y+2+x-3}=C$.

Общий интеграл $(y+2)^2=C\cdot(y+x-1)$.

1.4. Линейные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли.

Определение. **Дифференциальное уравнение вида**

$$y'+P(x)y=Q(x), \tag{1.7}$$

в котором $P(x)$, $Q(x)$ – непрерывные функции (в частности постоянные), называется линейным уравнением первого порядка.

Рассмотрим два метода интегрирования таких уравнений: метод Бернулли и метод Лагранжа.

Метод Бернулли. Решение уравнения (1.7) ищется в виде произведения двух функций, т.е. с помощью подстановки $y=u\cdot v$, где $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – неизвестные функции от x. Тогда $y'=u'v+uv'$. Подставляя y и y' в уравнение (1.7), получим:

$$u'v+uv'+P(x)uv=Q(x),$$

$$u'v+u(v'+P(x)v)=Q(x).$$

При этом одну из этих функций, например, $v(x)$, можно выбрать произвольно (из соображений удобства), тогда вторая определяется из уравнения (1.7). Собственно решение, а именно нахождение двух неизвестных функций $u(x)$ и $v(x)$, осуществляется разделением одного дифференциального уравнения на два:

1) $v'+P(x)v=0$;

2) $u'v=Q(x)$.

Из первого дифференциального уравнения находим $v(x)$, разделяя переменные:

$$\frac{dv}{dx} = -P(x)v;$$

$$\frac{dv}{v} = -P(x)dx;$$

$$\ln|v| = -\int P(x)dx + C.$$

т.о. $v = e^{-\int P(x)dx}$, (ввиду свободы выбора функции $v(x)$, можно принять $C = 0$).

Далее, подставляя найденное $v(x)$ во второе уравнение, получим:

$$\frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v};$$

$$du = Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx;$$

$$\text{или} \quad u = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C.$$

Общее решение уравнения

$$y = uv = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left(\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C\right).$$

Рассмотренным методом можно решить задачи № 5 данного учебного пособия.

Пример 4.31.

Найти решение задачи Коши

$$y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{x^2}; \; y(1) = 1.$$

Решение.

Требуется решить линейное уравнение первого порядка. Применим способ подстановки. Положим $y = u \cdot v$, тогда $y' = u'v + uv'$ и уравнение преобразуется к виду

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = -\frac{2}{x^2};$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = -\frac{2}{x^2}.$$

Потребуем, чтобы $v' - \dfrac{v}{x} = 0$.

Разделяя переменные, получим: $\frac{dv}{dx}=\frac{v}{x}$; тогда $\frac{dv}{v}=\frac{dx}{x}$.

Откуда $v=x$.

Подставив v в преобразованное уравнение, будем иметь

$$u'x=-\frac{2}{x^2}; \qquad \frac{du}{dx}=-\frac{2}{x^3}; \qquad du=-\frac{2}{x^3}dx;$$

$$u=\int -\frac{2}{x^3}dx=-2\frac{x^{-2}}{-2}+C;$$

$$u=\frac{1}{x^2}+C.$$

Так как $y=uv$, то общее решение получается в виде

$$y=x\left(\frac{1}{x^2}+C\right)=\frac{1}{x}+Cx.$$

Начальное условие $y=1$ при $x=1$ позволяет найти C:

$$1=1+C \Rightarrow C=0.$$

Частное решение уравнения $y=\frac{1}{x}$.

Методом Лагранжа (*метод вариации произвольной постоянной*) уравнение (1.7) интегрируется следующим образом. Решают соответствующее уравнение без правой части, т.е. $y'+P(x)\cdot y=0$.

В этом уравнении переменные разделяются: $\frac{dy}{y}=-P(x)dx$ и $\ln|y|=-\int P(x)dx+\ln|C|$. Таким образом, $y=Ce^{-\int P(x)dx}$.

Метод вариации произвольной постоянной состоит в том, что постоянную C в полученном решении заменяют функцией $C(x)$. Решение уравнения (1.7) ищем в виде

$$y=C(x)\cdot e^{-\int P(x)dx}.$$

Находим y' и подставляем y и y' в уравнение (1.7), которое примет вид:

$$C'(x)\cdot e^{-\int P(x)dx}=Q(x),$$

Следовательно,

$$dC(x) = Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx,$$

Интегрируя, находим:

$$C(x) = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C.$$

Подставляя $C(x)$, получим общее решение дифференциального уравнения $y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left(\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C \right)$, естественно, та же формула была получена методом Бернулли.

Замечание. Уравнение вида $x' + P(y)x = Q(y)$ также является линейным, только относительно независимой переменной y и неизвестной функции $x(y)$.

Замечание используем при решении задачи № 5.

Пример 5.31.

Решить задачу Коши

$$dx + \left(2x + \sin 2y - 2\cos^2 y\right)dy = 0; \; y(-1) = 0.$$

Решение.

Разделим уравнение на dy.

$$\frac{dx}{dy} + 2x + \sin 2y - 2\cos^2 y = 0.$$

Это линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка относительно неизвестной функции $x = \varphi(y)$.

Найдём способом вариации произвольной постоянной общее решение линейного уравнения.

Сначала находим общее решение линейного однородного уравнения

$$\frac{dx}{dy} + 2x = 0.$$

Разделение переменных приводит это уравнение к виду

$$\frac{dx}{x} = -2dy.$$

Откуда $\ln|x| = -2y + \ln|C|;$

$$\ln\frac{x}{C} = -2y;$$

$$\frac{x}{C} = e^{-2y};$$

$$x = C\cdot e^{-2y}.$$

Будем варьировать C, полагая $C = C(y)$; при этом

$$x = C(y)\cdot e^{-2y}$$

$$\frac{dx}{dy} = C'(y)\cdot e^{-2y} + C(y)\cdot(-2)e^{-2y}.$$

Выражения x и $\frac{dx}{dy}$ подставим в исходное уравнение; получим

$$C'(y)\cdot e^{-2y} + C(y)(-2)e^{-2y} + 2C(y)e^{-2y} + \sin 2y - 2\cos^2 y = 0;$$

$$C'(y)\cdot e^{-2y} = 2\cos^2 y - \sin 2y;$$

$$C'(y) = e^{2y}\left(2\cos^2 y - \sin 2y\right);$$

Откуда $C(y) = \int e^{2y}(1 + \cos 2y - \sin 2y)dy$.

$$C(y) = \int e^{2y}dy + \int(\cos 2y - \sin 2y)e^{2y}dy.$$

Первый интеграл в правой части равенства табличный:

$$\int e^{2y}dy = \frac{1}{2}e^{2y} + C.$$

Второй интеграл $\int(\cos 2y - \sin 2y)e^{2y}dy$ вычислим с помощью формулы интегрирования по частям:

$$\int(\cos 2y - \sin 2y)e^{2y}dy = \int(\cos 2y - \sin 2y)d\left(\frac{e^{2y}}{2}\right) =$$

$$= (\cos 2y - \sin 2y)\cdot\frac{e^{2y}}{2} - \int\frac{e^{2y}}{2}(-2\sin 2y - 2\cos 2y)dy =$$

$$= (\cos 2y - \sin 2y)\cdot\frac{e^{2y}}{2} + \int(\sin 2y + \cos 2y)d\left(\frac{e^{2y}}{2}\right) =$$

$$=\left(\cos 2y-\sin 2y\right)\cdot\frac{e^{2y}}{2}+\left(\sin 2y+\cos 2y\right)\cdot\frac{e^{2y}}{2}-$$

$$-\int\frac{e^{2y}}{2}\left(2\cos 2y-2\sin 2y\right)dy=\frac{e^{2y}}{2}\left(\cos 2y-\sin 2y+\sin 2y+\cos 2y\right)-$$

$$-\int\left(\cos 2y-\sin 2y\right)e^{2y}dy=\frac{e^{2y}}{2}\cdot 2\cos 2y-\int\left(\cos 2y-\sin 2y\right)e^{2y}dy.$$

Получили первоначальный интеграл. Выразим его из уравнения

$$\int\left(\cos 2y-\sin 2y\right)e^{2y}dy=e^{2y}\cos 2y-\int\left(\cos 2y-\sin 2y\right)e^{2y}dy;$$

$$\int\left(\cos 2y-\sin 2y\right)e^{2y}dy=\frac{1}{2}e^{2y}\cos 2y+C.$$

Тогда $C(y)=\frac{1}{2}e^{2y}+\frac{1}{2}e^{2y}\cos 2y+C_1$.

Подставляя выражение $C(y)$ в решение однородного уравнения, придём к общему решению исходного уравнения

$$x=\left(\frac{1}{2}e^{2y}\left(1+\cos 2y\right)+C_1\right)e^{-2y};$$

$$x=\cos^2 y+C_1e^{-2y}.$$

Начальное условие $y=0$ при $x=-1$ позволяет найти C_1:

$$-1=\cos^2 0+C_1e^0;$$

$$-1=1+C_1\Rightarrow C_1=-2.$$

Решение задачи Коши $x=\cos^2 y-2e^{-2y}$.

Определение. **Уравнение вида $y'+P(x)y=Q(x)y^n$, где $n\in R, n\neq 0; n\neq 1$, $P(x)$, $Q(x)$ – непрерывные функции, называется уравнением Бернулли.**

Оно приводится к линейному уравнению с помощью подстановки $z=y^{-n+1}$. На практике, уравнение Бернулли можно, не сводя к линейному, проинтегрировать с помощью подстановки $y=u\cdot v$, т.е. методом Бернулли или применив метод вариации произвольной постоянной.

Пример 6.31.

Найти решение задачи Коши

$$xy' + y = xy^2;\ y(1) = 1.$$

Решение.

Решением любого дифференциального уравнения Бернулли при $n > 0$ является функция $y = 0$.

Для решения разделим обе части уравнение на y^2, получим:

$$\frac{x}{y^2}y' + \frac{1}{y} = x.$$

Положим $\frac{1}{y} = z$; тогда $-\frac{1}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$ и уравнение примет вид

$$x \cdot \left(-\frac{dz}{dx}\right) + z = x;$$

$$x \cdot z' - z = -x.$$

Это линейное уравнение. Решим его методом подстановки: $z = u \cdot v$; $z' = u'v + uv'$.

$$x(u'v + uv') - uv = -x;$$

$$xu'v + u(xv' - v) = -x.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xv' - v = 0 \\ xu'v = -x \end{cases}$$

1) $x \cdot \frac{dv}{dx} = v$; $\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} \Rightarrow v = x$.

2) $x \cdot u'v = -x$;

$\frac{du}{dx} \cdot x = -1$; $du = -\frac{1}{x}dx \Rightarrow u = -\ln|x| + \ln C$

$$u = \ln|C/x|.$$

Получим общее решение линейного уравнения $z = u \cdot v = x \cdot \ln|C/x|$.

Заменим $z = \frac{1}{y}$:

$$\frac{1}{y} = x \cdot \ln|C/x| \text{ или } y = \frac{1}{x \cdot \ln|C/x|}.$$

Найдём частное решение при начальных условиях $y(1) = 1$.

$$1 = \frac{1}{1 \cdot \ln|C|};\ \ln|C| = 1;\ C = e.$$

Частное решение уравнения Бернулли: $y = \dfrac{1}{x \cdot \ln|e/x|} = \dfrac{1}{x(1 - \ln|x|)}$.

1.5. Уравнения в полных дифференциалах.

Определение. **Дифференциальное уравнение**

$$P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0 \tag{1.8}$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $U(x; y)$**, т.е.**

$$dU(x; y) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = P(x; y)dx + Q(x; y)dy. \tag{1.9}$$

Уравнение (1.8) с учётом (1.9) можно записать в виде $dU(x; y) = 0$, поэтому его общий интеграл имеет вид

$$U(x; y) = C.$$

Для того, чтобы уравнение (1.8) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{1.10}$$

Функция $U(x; y)$ может быть найдена из системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = P(x; y), \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = Q(x; y), \end{cases}$$

либо по формуле $$U(x; y) = \int_{x_0}^{x} P(x; y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0; y)dy, \tag{1.11}$$

где $(x_0; y_0)$ – некоторая фиксированная точка из области непрерывности функций $P(x; y), Q(x, y)$ и их частных производных.

Применим это при решении задачи №7.

Пример 7.31.

Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$\frac{xdx + ydy + (xdy - ydx)}{x^2 + y^2} = 0.$$

Решение.

Сгруппируем слагаемые уравнения относительно дифференциалов dx и dy:

$$\frac{(x - y)dx}{x^2 + y^2} + \frac{(y + x)dy}{x^2 + y^2} = 0$$

Проверим, например, что дифференциальное выражение $\frac{x - y}{x^2 + y^2}dx + \frac{y + x}{x^2 + y^2}dy$ представляет собой полный дифференциал $dU(x; y)$, и найдём функцию $U(x; y)$.

В данном случае

$$\begin{cases} P(x;y) = \dfrac{x - y}{x^2 + y^2} \\ Q(x;y) = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2} \end{cases}; \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial P(x;y)}{\partial y} = \dfrac{-1\cdot\left(x^2 + y^2\right) - 2y(x - y)}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \dfrac{y^2 - 2xy - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \\ \dfrac{\partial Q(x;y)}{\partial x} = \dfrac{1\cdot\left(x^2 + y^2\right) - 2x(x + y)}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \dfrac{y^2 - 2xy - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \end{cases}.$$

Следовательно, условие $\frac{\partial P(x; y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x; y)}{\partial x}$ выполнено.

Найдём функцию $U(x; y)$, удовлетворяющую уравнениям:

$$\frac{\partial U(x; y)}{\partial x} = \frac{x - y}{x^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial U(x; y)}{\partial y} = \frac{x + y}{x^2 + y^2}.$$

Интегрируя первое уравнение, получим:

$$U(x;y)=\int\frac{x-y}{x^2+y^2}\,dx+\varphi(y)=\int\frac{x}{x^2+y^2}\,dx-y\int\frac{dx}{x^2+y^2}+\varphi(y)=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+y^2\right|-y\cdot\frac{1}{y}\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+\varphi(y)=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+y^2\right|-\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+\varphi(y).$$

Отсюда

$$\frac{\partial U(x;y)}{\partial y}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{x^2+y^2}-\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)+\varphi'(y)=\frac{y}{x^2+y^2}+$$

$$+\frac{x}{x^2+y^2}+\varphi'(y)=\frac{x+y}{x^2+y^2}+\varphi'(y).$$

Поскольку $\dfrac{\partial U(x;y)}{\partial y}=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$, то $\varphi'(y)=0 \;\Rightarrow\; \varphi(y)=C$.

Следовательно, $U(x;y)=\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2+y^2\right|-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}+C$.

Перепишем исходное дифференциальное уравнение в виде:

$$d\left(\frac{1}{2}\ln\left|x^2+y^2\right|-\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)=0$$

Общий интеграл дифференциального уравнения:

$$\ln\left|x^2+y^2\right|-2\operatorname{arctg}\frac{x}{y}=C.$$

Замечание. Если условие (1.10) не выполняется для уравнения (1.8), то в ряде случаев его можно свести к уравнению в полных дифференциалах умножением на некоторую функцию $\mu(x;y)=\mu$, называемую «интегрирующим множителем». Интегрирующий множитель легко находится в двух случаях: если $\mu=\mu(x)$ или $\mu=\mu(y)$.

В первом случае $\mu(x)=e^{\int\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}dx}$, причем выражение $\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$

должно зависеть только от x; во втором случае $\mu(y)=e^{\int \frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P}dy}$, причем подынтегральное выражение должно зависеть только от y.

1.6. Поле направлений. Изоклины.

Дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$y'=f(x;y) \tag{1.12}$$

позволяет на основании лишь геометрической интерпретации найти его приближённые решения. Для этого достаточно построить так называемое поле направлений, которое определяется следующим образом.

Пусть $y=\varphi(x)$ – некоторое решение дифференциального уравнения (1.12). Следовательно, вспоминая геометрический смысл производной функции, можно записать

$$y'=\varphi'(x)=f(x;y)=\operatorname{tg}\alpha(x;y) \tag{1.13}$$

где $\alpha(x;y)=\operatorname{arctg}(f(x;y))$ – угол между положительным направлением оси Ox и касательной к неизвестной кривой $y=\varphi(x)$ в каждой точке $(x;\varphi(x))$ плоскости Oxy.

Тем самым, выбрав на плоскости Oxy некоторую область D, можно «наполнить» её точками целочисленных значений $(x;y)$, вычислить в каждой из них упомянутый угол и изобразить касательную в виде маленькой стрелки, построив таким образом поле направлений.

Определение. **Геометрическое место точек $(x;y)\in D$, в которых $y'=C$, где C – постоянная, называется изоклиной данного дифференциального уравнения.**

В точках изоклины направление поля одинаково, т.е. направления касательных в точках изоклины параллельны.

Выделение изоклин на поле направлений позволяет «увидеть» кривые, приближённо представляющие решение дифференциального уравнения (интегральные кривые).

Придавая параметру C близкие целочисленные значения, можно построить достаточно густую сеть изоклин, а на каждой из них нанести ряд стрелочек, наклонённых под углом α к оси Ox, для которых $\operatorname{tg}\alpha = C$, по направлениям этих стрелок провести интегральные кривые.

Метод изоклин, или геометрический метод решения дифференциальных уравнений, применяется в тех случаях, когда решение уравнения (общее или частное) не выражается через элементарные функции.

Описанный прием используется при решении задачи № 8.

Пример 8.31.

Дано дифференциальное уравнение $y' = x + 2y$. Построить поле направлений. Методом изоклин построить приближённо графики интегральных кривых. Построить интегральную кривую, проходящую через точку $M(1;2)$. Сравнить их с точными интегральными кривыми.

Решение.

Имеем $f(x;y) = x + 2y$; $f_y'(x;y) = 2$.

Условие теоремы существования и единственности выполняются во всех точках плоскости Oxy. Через каждую точку проходит единственная интегральная кривая, и различные интегральные кривые не пересекаются.

Изоклинами данного уравнения служат прямые $x + 2y = C$.

При $C = 0$, $\operatorname{tg}\alpha = 0$, будем иметь изоклину $x + 2y = 0$, во всех точках которой направление поля параллельно оси Ox.

При $C = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = 1$, получим изоклину $x + 2y = 1$, во всех точках которой направление поля образует с осью Ox угол $\alpha = 45^\circ$.

При $C = -1$, $\operatorname{tg}\alpha = -1$, во всех точках изоклины $x + 2y = -1$, направление поля образует с осью Ox угол $\alpha = -45^\circ$.

При $C = \pm 2$, $\operatorname{tg}\alpha = \pm 2$, изоклины имеют вид $x + 2y = \pm 2$, во всех точках которых направление поля образует с осью Ox углы $\alpha = \operatorname{arctg}(\pm 2) \approx \pm 63^\circ$, и т.д.

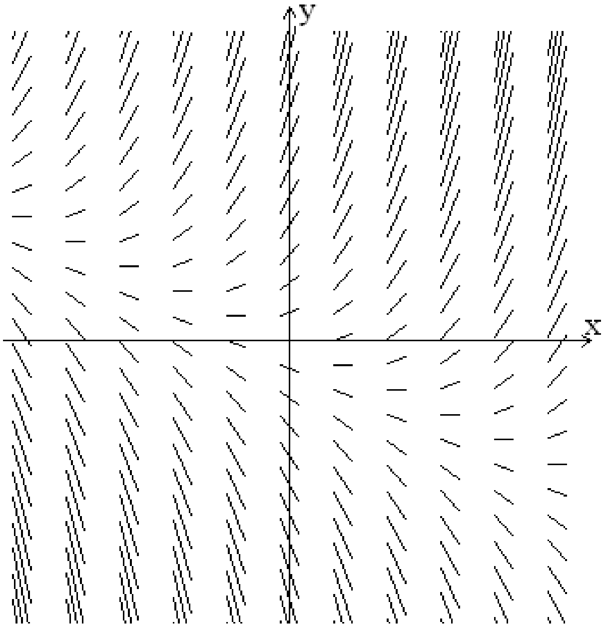

Рис. 1. 1. Поле направлений

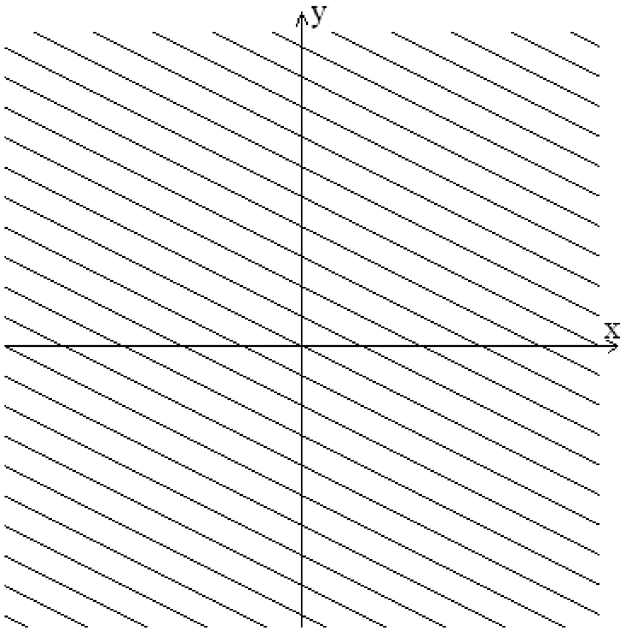

Рис. 1.2. Изоклины

В точке $M(1;2)$ произвольная постоянная будет равна $C = 1 + 2 \cdot 2 = 5$, изоклина примет вид $x + 2y = 5$, во всех точках которой направление поля образует с осью Ox угол $\alpha = \operatorname{arctg} 5 \approx 79°$.

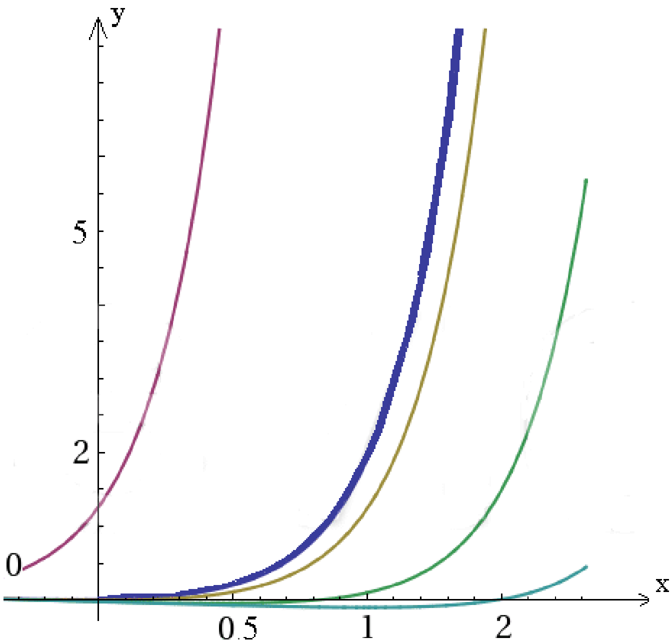

Рис. 1.3. Семейство интегральных кривых

Построим теперь интегральные кривые, которые в каждой точке касаются «поля».

Точные интегральные кривые имеют вид $y = -\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4} + Ce^{2x}$.

В точке $M(1;2)$: $y = -\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{11}{4}e^{2x-2}$.

1.7. Метод Эйлера приближенного решения дифференциальных уравнений первого порядка.

Рассмотрим задачу отыскания приближенного решения дифференциального уравнения первого порядка вида (1.12):

$$\frac{dy}{dx} = f(x;y)$$

на отрезке $[a;b]$. Запишем данное уравнение сначала в виде $dy = f(x;y)dx$, а затем в виде приближенного соотношения

$$\Delta y \approx f(x;y)\cdot\Delta x,$$

т.к. $dy \approx \Delta y$. Разбивая промежуток $[a;b]$ на n равных частей $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = h$ (шагов) и обозначая $\Delta y = y_n - y_{n-1}$, $n = 1,2,...$ получаем общую формулу для вычисления любого приближенного значения y, т.е. решения, при известном значении $x \in [a;b]$:

$$y_n - y_{n-1} = f(x_{n-1};y_{n-1})\cdot h, \;\Rightarrow\; y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1};y_{n-1})\cdot h.$$

При $n=1$ имеем $y_1 = y_0 + f(x_0;y_0)\cdot h$, при $n=2$ получим $y_2 = y_1 + f(x_1;y_1)\cdot h$, и т.д.

Более подробно рассмотрим особенности метода на примере задачи № 19.

Пример 19.31.

На отрезке [0;1] с шагом $h = 0{,}1$ методом Эйлера построить решение задачи Коши дифференциального уравнения $y' = 5x - 3y$ при начальных условиях $y(0) = 0$.

Решение.

По приведенным выше формулам имеем:

$y_1 = y_0 + (5x_0 - 3y_0)\cdot h = 0 + (5\cdot 0 - 3\cdot 0)\cdot 0{,}1 = 0$;

$y_2 = y_1 + (5x_1 - 3y_1)\cdot h = 0 + (5\cdot 0{,}1 - 3\cdot 0)\cdot 0{,}1 = 0{,}05$;

$y_3 = y_2 + (5x_2 - 3y_2)\cdot h = 0{,}05 + (5\cdot 0{,}2 - 3\cdot 0{,}05)\cdot 0{,}1 = 0{,}135$; и т.д.

По результатам вычислений составляем таблицу 1.1.:

Табл. 1.1.

n	x_n	y_n	$5x_n - 3y_n$	$\Delta y_n = (5x_n - 3y_n)\cdot h$	$y_{аналит}$
0	0	0	0	0	0
1	0,1	0	0,5	0,05	0,023
2	0,2	0,05	0,85	0,085	0,083
3	0,3	0,135	1,095	0,11	0,17
4	0,4	0,245	1,267	0,127	0,278
5	0,5	0,372	1,386	0,139	0,402
6	0,6	0,511	1,471	0,147	0,536
7	0,7	0,658	1,529	0,153	0,679
8	0,8	0,811	1,571	0,157	0,828
9	0,9	0,967	1,599	0,16	0,982
10	1	1,127	-	-	1,139

Для сравнения и оценки точности метода Эйлера решим эту же задачу аналитически. Запишем уравнение в виде $y' - 3y = 5x$, это линейное дифференциальное уравнение, которое решается заменой $y = u \cdot v$ (см. п.1.4). Общее решение имеет вид $y = \frac{5}{3}\left(x - \frac{1}{3}\right) + Ce^{-3x}$, а частное решение с учетом начальных условий $y(0) = 0$, запишется так $y = \frac{5}{3}\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{5}{9}e^{-3x}$. В таблице частное аналитическое решение представлено в последней колонке - $y_{аналит}$.

Сравним значение $y_{аналит}$ на правом конце промежутка [0;1]: $y(1) = 1{,}139$ с приближенным значением $y(1) = y_{10} = 1{,}127$.

Оценим полученную точность:

$$\Delta_{абс} = |1{,}139 - 1{,}127| = 0{,}012,$$

$$\Delta_{отн} = \frac{\Delta_{абс}}{1{,}139} = 0{,}0105 \approx 1\%,$$

$\Delta_{абс}$, $\Delta_{отн}$ – абсолютная и относительная погрешности приближенного решения, полученного методом Эйлера.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

2.1. Основные понятия.

Определение. **Уравнение**

$$F(x, y, y', y'') = 0, \tag{2.1}$$

связывающее между собой независимую переменную x, неизвестную функцию $y(x)$, а также её первые две производные $y'(x)$ и $y''(x)$, называется дифференциальным уравнением второго порядка.

Если уравнение (2.1) можно записать в виде

$$y'' = f(x; y; y'), \tag{2.2.}$$

то говорят, что оно разрешимо относительно второй производной. Мы будем иметь дело только с такими уравнениями.

Определение. **Задача отыскания решения уравнения (2.2), удовлетворяющего заданным начальным условием $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, где x_0, y_0, y'_0 – некоторые постоянные, называется задачей Коши.**

Определение. **Общим решением уравнения (2.2) называется функция $y = \varphi(x; C; C_2)$, зависящая от двух произвольных постоянных C_1 и C_2 и такая, что:**

1) она является решением этого уравнения при любых конкретных значениях C_1 и C_2;

2) при любых допустимых начальных условиях $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ можно подобрать, такие значения постоянных C_1^0 и C_2^0, что функция $y = \varphi\left(x; C_1^0; C_2^0\right)$ будет удовлетворять этим начальным условиям.

Любая функция $y = \varphi\left(x; C_1^0; C_2^0\right)$, получаемая из общего решения уравнения (2.2) при конкретных значениях постоянных C_1 и C_2, называется частным решением этого уравнения.

Для дифференциального уравнения второго порядка (2.2) имеет место теорема существования и единственности решения, аналогичная соответствующей теореме для уравнений первого порядка.

***Теорема.* Если функция $f(x; y; y')$ и ее частные производные $f'_y(x; y; y')$ и $f'_{y'}(x; y; y')$ непрерывны в некоторой области D, содержащей точку с координатами $(x_0; y_{0;} y'_0)$, то существует и притом единственное решение $y = y(x)$ уравнения (2.2), удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$; $y'(x_0) = y'_0$.**

Общий интеграл $\Phi(x; y; C_1; C_2) = 0$ или общее решение $y = \varphi(x; C_1; C_2)$ уравнения (2.2) представляют собой семейство кривых, зависящих от двух произвольных постоянных.

Замечание. Аналогичные понятия и определения имеют место для дифференциальных уравнений *n*-го порядка, которые в общем виде записываются как

$$F\left(x; y; y'; y'';...; y^{(n)}\right) = 0.$$

Общее решение дифференциального уравнения *n*-го порядка является функцией вида

$$y = \varphi(x; C_1; C_2;...; C_n),$$

содержащей *n* произвольных постоянных, не зависящих от *x*.

Задача нахождения решения дифференциального уравнения *n*-го порядка сложнее, чем первого. Поэтому рассмотрим лишь отдельные виды дифференциальных уравнений высших порядков.

2.2. Дифференциальные уравнения, допускающие непосредственное интегрирование.

Простейшим типом дифференциального уравнения 2-го порядка, допускающим понижение порядка, является уравнение вида

$$y'' = f(x) \tag{2.3}$$

Интегрированием обеих частей уравнения (2.3) оно приводится к уравнению 1-го порядка:

$$y' = \int f(x)dx = F(x) + C_1.$$

Повторно интегрируя полученное равенство, находим общее решение исходного уравнения: $y = \int (F(x) + C_1)dx + C_2$.

Изложенный приём используется при решении задачи №9.

Пример 9.31.

Найти решение задачи Коши

$$y'' = -cosx - \sin x + 2; \text{ при } y(0) = 1, \ y'(0) = -1.$$

Решение.

Интегрируя приведённое уравнение по x дважды, последовательно имеем

$$y' = \int (-\cos x - \sin x + 2)dx = -\sin x + \cos x + 2x + C_1;$$

$$y = \int (-\sin x + \cos x + 2x + C_1)dx = \cos x + \sin x + 2 \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2.$$

Последнее равенство представляет собой общее решение. Учитывая начальные условия, имеем систему уравнений для определения произвольных постоянных:

$$\begin{cases} -1 = -\sin 0 + \cos 0 + 2 \cdot 0 + C_1, \\ 1 = \cos 0 + \sin 0 + 0 + C_1 \cdot 0 + C_2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 = 1 + C_1, \\ 1 = 1 + C_2. \end{cases}$$

Решая систему, имеем $C_1 = -2; C_2 = 0$ и частное решение

$$y = \cos x + \sin x + x^2 - 2x.$$

Замечание. Если же дано уравнение $y^{(n)} = f(x)$, то, проинтегрировав его последовательно n раз, найдём общее решение уравнения:

$$y = \varphi_n(x) + C_1 \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \cdot \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + ... + C_n.$$

2.3. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.

2.3.1. Дифференциальные уравнения, не содержащие искомой функции y.

Рассмотрим уравнение

$$y'' = f(x; y') \qquad (2.4)$$

Такие уравнения допускают понижение порядка подстановкой:

$y' = z$, где $z = z(x)$ – новая неизвестная функция. Тогда $y'' = z'$ и уравнение (2.4) примет вид

$$z' = f(x; z),$$

т.е., оно стало дифференциальным уравнением первого порядка. Решая его (в зависимости от типа), найдём сначала, $z = z(x; C_1)$, т.е.

$$y' = z(x; C_1),$$

а затем и общее решение (интеграл)

$$y = \int z(x; C_1)dx + C_2 .$$

Данный прием используется при решении заданий №10.

Пример 10.31.

Найти общее решение дифференциального уравнения

$$\left(1 + x^2\right) \cdot y'' + 2xy' = 12x^3 .$$

Решение.

Это дифференциальное уравнение второго порядка, не содержащее явно искомой функции. Здесь порядок уравнения понижается на единицу подстановкой $y' = z$, отсюда $y'' = z'$, и уравнение примет вид

$$\left(1 + x^2\right) \cdot z' + 2xz = 12x^3 ,$$

т.е. получили линейное уравнение первого порядка. Решим его методом подстановки $z = u \cdot v$:

$$\left(1 + x^2\right) \cdot \left(u'v + uv'\right) + 2xuv = 12x^3 ,$$

$$\left(1 + x^2\right) \cdot u'v + u\left(\left(1 + x^2\right) \cdot v' + 2xv\right) = 12x^3 ,$$

$$\begin{cases} \left(1 + x^2\right) \cdot v' + 2xv = 0, \\ \left(1 + x^2\right) \cdot u'v = 12x^3. \end{cases}$$

1) $\quad \left(1 + x^2\right)\dfrac{dv}{dx} = -2xv ,$

$$\frac{dv}{v}=-\frac{2x}{1+x^2}dx,$$

$$\int\frac{dv}{v}=\int-\frac{2x}{1+x^2}dx,$$

$$\ln|v|=-\ln\left|1+x^2\right|,$$

$$v=\frac{1}{1+x^2}.$$

2) $$\left(1+x^2\right)\frac{du}{dx}\cdot\frac{1}{1+x^2}=12x^3,$$

$$du=12x^3dx,$$

$$u=\int 12x^3dx=12\cdot\frac{x^4}{4}+C_1=3x^4+C_1.$$

Получили, что $z=uv=\left(3x^4+C_1\right)\cdot\frac{1}{1+x^2}$.

Таким образом, $y'=\frac{3x^4+C_1}{1+x^2}$.

Откуда общее решение $y=\int\frac{3x^4+C_1}{x^2+1}dx$.

Подынтегральное выражение – неправильная дробь, выделим целую часть, разделив числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l} 3x^4+C_1 & x^2+1 \\ \cline{2-2} -\ 3x^4+3x^2 & 3x^2-3 \\ \hline -3x^2+C_1 & \\ -\ -3x^2-3 & \\ \hline 3+C_1 & \end{array}$$

Итак, $$y=\int\left(3x^2-3+\frac{3+C_1}{x^2+1}\right)dx=3\cdot\frac{x^3}{3}-3x+\left(3+C_1\right)\operatorname{arctg}x+C_2=$$

$$=x^3-3x+\left(3+C_1\right)\operatorname{arctg}x+C_2.$$

Замечание. Если задано уравнение вида

$$F(x;y^{(k)};y^{(k+1)};...;y^{(n)})=0,$$

которое также не содержит явно искомой функции, то его порядок можно понизить на k единиц, положив $y^{(k)} = z(x)$.

2.3.2. Дифференциальные уравнения, не содержащие независимой переменной *x*.

Рассмотрим уравнение

$$y'' = f(y; y') \tag{2.5}$$

Уравнения такого вида допускают понижение порядка подстановкой $y' = z = z(y)$ (формальное отсутствие аргумента x позволяет считать неизвестную функцию z функцией аргумента y), откуда:

$$y'' = \left(z(y)\right)' = z'(y)\cdot y'(x) = z'\cdot z.$$

Таким образом, уравнение (2.5) примет вид

$$z\cdot z' = f(y; z),$$

которое является дифференциальным уравнением первого порядка. Интегрируя его тем или иным методом в зависимости от его типа, получим общее решение $z = z(y; C_1)$.

Заменяя функцию $z(y)$ на y', получим $\dfrac{dy}{dx} = z(y; C_1)$, дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Интегрируя его, находим общий интеграл уравнения (2.5):

$$\int \frac{dy}{z(y; C_1)} = x + C_2.$$

Замечание. Также поступаем при решении уравнения

$$F(y; y'; y''; \ldots; y^{(n)}) = 0.$$

Его порядок можно понизить на единицу, положив $y' = z$, где $z = z(y)$. По правилу дифференцирования сложной функции находим

$$y'' = z\cdot\frac{dz}{dy}.$$

Затем $y''' = \dfrac{d}{dx}\left(z\cdot z_y{}'\right) = \dfrac{d}{dy}\left(z\cdot z_y{}'\right)\dfrac{dy}{dx} = z\left(\left(z_y{}'\right)^2 + z\cdot z_{yy}{}''\right)$ и т.д.

Рассмотренный прием используется при решении задачи №11.

Пример 11.31.

Найти решение задачи Коши $y''y^3+1=0$; $y(1)=-1$; $y'(1)=-1$.

Решение.

Это дифференциальное уравнение второго порядка, не содержащее явно независимой переменной x. Порядок уравнения можно понизить подстановкой $y'(x)=z(y)$, отсюда $y''=z'\cdot y'=z'\cdot z$.

Получаем уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:

$$z'z\cdot y^3+1=0 \Leftrightarrow \frac{dz}{dy}\cdot z=-\frac{1}{y^3},$$

$$zdz=-\frac{1}{y^3}dy \Leftrightarrow \int zdz=-\int\frac{1}{y^3}dy,$$

$$\frac{z^2}{2}=-\frac{y^{-2}}{-2}+\frac{C_1}{2} \Rightarrow z^2=\frac{1}{y^2}+C_1.$$

Сделаем обратную подстановку $z=y'$:

$$(y')^2=\frac{1}{y^2}+C_1.$$

Это соотношение представляет собой промежуточный интеграл первоначального уравнения. Используя начальное условие $y'(1)=-1$, найдем C_1:

$$(-1)^2=1+C_1 \Rightarrow C_1=0$$

Следовательно,

$$(y')^2=\frac{1}{y^2} \Rightarrow y'=\left|\frac{1}{y}\right| \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\pm\frac{1}{y} \Rightarrow$$

$$ydy=\pm dx \Leftrightarrow \int ydy=\pm\int dx,$$

$$\frac{y^2}{2}=\pm x+C_2.$$

Начальное условие $y(1)=-1$ даёт

$$\frac{(-1)^2}{2} = \pm 1 + C_2 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} C_2 = -\dfrac{1}{2}; \\ C_2 = \dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Поэтому частное решение, удовлетворяющее заданной системе начальных условий, имеет вид:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{y^2}{2} = x - \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{y^2}{2} = -x + \dfrac{3}{2}. \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{1}{2}, \\ x = \dfrac{3}{2} - \dfrac{y^2}{2}. \end{array}\right.$$

2.4. Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков.

2.4.1. Интегрирование линейных однородных дифференциальных уравнений (ЛОДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами.

Определение. **ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:**

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{2.6}$$

Квадратное уравнение

$$k^2 + pk + q = 0, \tag{2.7}$$

называется характеристическим уравнением для дифференциального уравнения (2.6); для его составления достаточно в уравнении (2.6) заменить y'', y' и y соответственно k^2, k и 1.

Для составления общего решения y дифференциального уравнения (2.6) необходимо найти корни k_1 и k_2 соответствующего уравнения (2.7) и применить следующую теорему.

Теорема. **Пусть** k_1 **и** k_2 **- корни характеристического уравнения** (2.7). **Тогда:**

1) если корни k_1 и k_2 действительные и различные $k_1 \neq k_2$ $\left(D = \frac{p^2}{4} - q > 0\right)$, то общее решение имеет вид: $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$;

2) если корни k_1 и k_2 действительные и равные $k_1 = k_2$ $\left(D = \frac{p^2}{4} - q = 0;\ k_1 = k_2 = \frac{p}{2}\right)$, то общее решение примет вид:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x};$$

3) если корни k_1 и k_2 комплексные: $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$ $\left(D = \frac{p^2}{4} - q < 0;\ \alpha = -\frac{p}{2};\ \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} > 0\right)$, то общее решение запишется в виде: $y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)$.

2.4.2. Интегрирование ЛОДУ *n*-ого порядка с постоянными коэффициентами

Задача нахождения общего решения ЛОДУ *n*-ого порядка ($n > 2$) с постоянными коэффициентами:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_n y = 0, \tag{2.8}$$

где $p_i \in R$, $i = \overline{1,n}$, решается аналогично случаю уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическим для уравнения (2.8) является алгебраическое уравнение n-го порядка вида:

$$k^n + p_1 k^{n-1} + p_2 k^{n-2} + \ldots + p_{n-1} k + p_n = 0. \tag{2.9}$$

Уравнение *n*-ой степени (2.9) имеет, как известно *n*-корней (в их числе могут быть и комплексные). Обозначим их соответственно k_1, k_2 ,..., k_n.

1) Если корни уравнения (2.9) действительны и различны, то общее решение уравнения (2.8) записывается в виде:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \ldots + C_n e^{k_n x}.$$

2) Все корни характеристического уравнения действительные, но среди них есть кратные.

Тогда каждому простому корню k соответствует одно частное решение вида e^{kx}, а каждому корню k кратности $m>1$соответствует m частных решений:

$$e^{kx},\ xe^{kx},\ x^2e^{kx},...,\ x^{m-1}e^{kx}.$$

3) Среди корней уравнения (2.8) есть комплексно-сопряженные корни. Тогда каждой паре $\alpha\pm\beta i$ простых комплексно-сопряженных корней соответствует два частных решения $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$, а каждой паре $\alpha\pm\beta i$ корней кратности $m>1$ соответствует $2m$ частных решений вида:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x,..., x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x;$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x,..., x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

2.5. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков.

2.5.1. Интегрирование линейных неоднородных дифференциальных уравнений (ЛНДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами.

Определение. **ЛНДУ второго порядка имеют вид:**

$$y''+py'+qy=f(x). \qquad (2.10)$$

Уравнение

$$y''+py'+qy=0, \qquad (2.11)$$

левая часть, которого совпадает с левой частью ЛНДУ (2.10), называется соответствующим ему однородным уравнением.

Теорема (структура общего решения ЛНДУ).

Общим решением y уравнения (2.10) является сумма его произвольного частного решения y^* и общего решения

$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ **соответствующего однородного уравнения (2.11), т.е.** $y = y^* + \bar{y}$**.**

Поскольку общее решение $\bar{y}$ ЛОДУ (2.11) легко находится (см. пункт 2.4.1.), то для нахождения общего решения ЛНДУ (2.10) остается найти какое-нибудь частное решение y^*.

2.5.2. Интегрирование ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Для уравнений с постоянными коэффициентами (2.10) существует простой способ нахождения y^*, если правая часть $f(x)$ имеет так называемый *“специальный вид”*:

1) $f(x) = P_n(x)$,

2) $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$,

3) $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$.

Суть метода, называемого методом неопределённых коэффициентов, состоит в следующем: по виду правой части $f(x)$ уравнения (2.10) записывают ожидаемую форму частного решения с неопределёнными коэффициентами, затем подставляют её в уравнение (2.10) и из полученного тождества находят значения коэффициентов.

Случай 1.

Пусть правая часть уравнения (2.10) имеет вид:

$f(x) = P_n(x)$, где $P_n(x)$– многочлен степени n.

Уравнение (2.10) запишется в виде:

$$y'' + py' + qy = P_n(x).$$

В этом случае частное решение y^* ищется в виде:

$$y^* = x^r Q_n(x), \tag{2.12}$$

где r – число, равное кратности корня $k = 0$ характеристического уравнения (2.11), а $Q_n(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n$ – многочлен степени n, записанный с неопределёнными коэффициентами $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Случай 2.

Пусть правая часть уравнения (2.10) имеет вид:

$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, где $\alpha \in R$, $P_n(x)$– многочлен степени n.

Уравнение (2.10) запишется в виде:

$$y'' + py' + qy = P_n(x)e^{\alpha x}.$$

В этом случае частное решение y^* ищется в виде:

$$y^* = x^r Q_n(x)e^{\alpha x}, \qquad (2.13)$$

где r – число, равное кратности корня $k = \alpha$ характеристического уравнения (2.11), а $Q_n(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n$ – многочлен степени n, записанный с неопределёнными коэффициентами $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Случай 3.

Пусть правая часть уравнения (2.10) имеет вид:

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x),$$

где $P_n(x)$, $Q_m(x)$- многочлены степени n и m соответственно, α и β - действительные числа.

Уравнение (2.10) запишется в виде:

$$y'' + py' + qy = e^{\alpha x}(P_n(x)cos\,\beta x + Q_m(x)sin\,\beta x).$$

В этом случае частное решение нужно искать в виде:

$$y^* = x^r e^{\alpha x}(M_l(x)\cos\beta x + N_l(x)\sin\beta x), \qquad (2.14)$$

где r – число, равное кратности корня $k = \alpha + \beta i$ характеристического уравнения (2.11), $M_l(x)$ и $N_l(x)$ – многочлены степени ℓ с неопределенными коэффициентами, ℓ – наивысшая степень многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$.

Замечание 1. После постановки функции (2.12) в уравнение (2.10) приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях x, в правой и левой частях уравнения.

Замечание 2. После постановки функции (2.14) в уравнение (2.10) приравнивают многочлены, стоящие перед одноимёнными тригонометрическими функциями в левой и правой частях уравнения.

Замечание 3. Форма (2.14) сохраняется и в случаях, когда $P_n(x)=0$ или $Q_m(x)=0$.

Замечание 4. Если правая часть уравнения (2.10) есть сумма функций вида 1, 2 или 3, то для нахождения y^* следует использовать следующую теорему.

Теорема (о наложении решений).

Если $y^*{}_1$ и $y^*{}_2$ частные решения соответственно уравнений:

$$y''+py'+qy=f_1(x)$$

$$y''+py'+qy=f_2(x),$$

то функция $y^*=y_1^*+y_2^*$ - частное решение уравнения:

$$y''+py'+qy=f_1(x)+f_2(x).$$

Замечание 5. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами порядка $n>2$, решаются аналогично уравнениям второго порядка.

Этим методом решаются задания №12, 13, 14, 15.

Пример 12.31.

Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'''-5y''+6y'=6x^2+2x-5.$$

Решение.

Дано ЛНДУ третьего порядка с постоянными коэффициентами с особой правой частью.

1) Найдём решение соответствующего однородного уравнения

$$y'''-5y''+6y'=0.$$

Составляем характеристическое уравнение

$k^3-5k^2+6k=0;\ \Leftrightarrow\ k\left(k^2-5k+6\right)=0;\ \Leftrightarrow\ k(k-2)(k-3)=0.$

Находим его корни: $k_1=0$, $k_2=2$, $k_3=3$.

Общее решение имеет вид $\overline{y}=C_1+C_2e^{2x}+C_3e^{3x}$.

2) Поскольку правая часть неоднородного уравнения представляет собой многочлен второй степени $f(x)=6x^2+2x-5$, то частное

решение y^* следует искать в полной форме многочлена второй степени

$$y^* = x^r\left(Ax^2 + Bx + C\right)$$

(так как корень характеристического уравнения $k_1 = 0$, то $r = 1$).

Итак, $y^* = Ax^3 + Bx^2 + Cx$;

$y^{*\prime} = 3Ax^2 + 2Bx + C$;

$y^{*\prime\prime} = 6Ax + 2B$;

$y^{*\prime\prime\prime} = 6A$.

Подставим y^*, $y^{*\prime}$, $y^{*\prime\prime}$, $y^{*\prime\prime\prime}$ в исходное дифференциальное уравнение, получим тождество относительно x:

$$6A - 5(6Ax + 2B) + 6\left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) = 6x^2 + 2x - 5;$$

$$18Ax^2 + (12B - 30A)x + \left(6A - 10B + 6C\right) = 6x^2 + 2x - 5.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и в правой части:

$$\begin{array}{l|r} x^2 & 18A = 6; \\ x^1 & 12B - 30A = 2; \\ x^0 & 6A - 10B + 6C = -5. \end{array}$$

Решим эту систему:

$$\begin{cases} A = \dfrac{1}{3}; \\ B = \dfrac{1}{12}\left(2 + 30 \cdot \dfrac{1}{3}\right) = 1; \\ C = \dfrac{1}{6}\left(-5 - 6 \cdot \dfrac{1}{3} + 10 \cdot 1\right) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Следовательно, имеем

$$y^* = x\left(\frac{1}{3}x^2 + x + \frac{1}{2}\right).$$

3) Общее решение исходного уравнения примет вид:

$$y=\bar{y}+y^*=C_1+C_2e^{2x}+C_3e^{3x}+x\left(\frac{1}{3}x^2+x+\frac{1}{2}\right).$$

Пример 13.31.

Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'''+y''-6y'=(20x+14)e^{2x}.$$

Решение.

Дано ЛНДУ третьего порядка с постоянными коэффициентами с особой правой частью.

1) Найдём решение соответствующего однородного уравнения

$$y'''+y''-6y'=0.$$

Составляем характеристическое уравнение:

$k^3+k^2-6k=0$; $\Leftrightarrow$ $k\left(k^2+k-6\right)=0$; $\Leftrightarrow$ $k(k+3)(k-2)=0$.

Находим его корни: $k_1=0$, $k_2=-3$, $k_3=2$.

Общее решение имеет вид: $\bar{y}=C_1+C_2e^{-3x}+C_3e^{2x}$.

2) Определяем форму частного решения y^*. Поскольку правая часть уравнения представляет собой произведение многочлена первой степени на показательную функцию $f(x)=(20x+14)e^{2x}$, то частное решение ищем в виде:

$$y^*=x^r(Ax+B)e^{2x}$$

(в данном случае $\alpha=2$; так как корень характеристического уравнения $k_3=2$, то $r=1$).

Итак, $y^*=\left(Ax^2+Bx\right)e^{2x}$.

Найдём производные $y^{*\prime}$, $y^{*\prime\prime}$, $y^{*\prime\prime\prime}$ и подставим их в исходное уравнение.

$y^{*\prime}=(2Ax+B)e^{2x}+2e^{2x}\left(Ax^2+Bx\right)=e^{2x}\left(2Ax^2+(2A+2B)x+B\right)$;

$y^{*\prime\prime}=2e^{2x}\left(2Ax^2+(2A+2B)x+B\right)+e^{2x}(4Ax+2A+2B)=$

$=e^{2x}\left(4Ax^2+(8A+4B)x+2A+4B\right)$;

$$y^{*\prime\prime\prime}=2e^{2x}\left(4Ax^2+(8A+4B)x+2A+4B\right)+e^{2x}(8Ax+8A+4B)=$$
$$=e^{2x}\left(8Ax^2+(24A+8B)x+12A+12B\right).$$

Будем иметь:

$$e^{2x}\left(8Ax^2+(24A+8B)x+12A+12B\right)+e^{2x}\left(4Ax^2+(8A+4B)x+2A+4B\right)-$$
$$-6e^{2x}\left(2Ax^2+(2A+2B)x+B\right)=(20x+14)e^{2x}.$$

Сократим на e^{2x}.

Приведя подобные члены и сравнивая неопределённые коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему:

$$\begin{array}{l|c}
x^2 & 8A+4A-12A=0; \\
x^1 & 24A+8B+8A+4B-6(2A+2B)=20; \\
x^0 & 12A+12B+2A+4B-6B=14.
\end{array}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}20A=20; \\ 14A+10B=14;\end{cases}\qquad \Rightarrow\begin{cases}A=1. \\ B=0.\end{cases}$$

Следовательно, частное решение примет вид

$$y^*=x^2\cdot e^{2x}.$$

3) Окончательно, общее решение будет:

$$y=\overline{y}+y^*=C_1+C_2e^{-3x}+C_3e^{2x}+x^2e^{2x}.$$

Пример 14.31.

Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''-4y'+4y=e^{2x}\sin 6x.$$

Решение.

Дано ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами с особой правой частью.

1) Найдём решение соответствующего однородного уравнения

$$y''-4y'+4y=0$$

Составим характеристическое уравнение

$k^2-4k+4=0;\ \Leftrightarrow\ (k-2)^2=0.$

Корни уравнения: $k_{1,2}=2$.

Общее решение имеет вид: $\overline{y}=(C_1+C_2x)e^{2x}$.

2) Определим форму частного решения. Поскольку правая часть уравнения представляет собой произведение показательной функции на тригонометрическую: $f(x)=e^{2x}\sin 6x$, то частное решение следует искать в виде:

$$y^*=x^r e^{2x}(A\cos 6x+B\sin 6x)$$

(в данном случае $\alpha=2$, $\beta=6$, $\alpha+i\beta=2+i6$; т.к. такого корня у характеристического уравнения нет, то $r=0$).

Итак, $y^*=e^{2x}(A\cos 6x+B\sin 6x)$.

Найдём $y^{*\prime}$, $y^{*\prime\prime}$ и подставим их в исходное уравнение.

$$y^{*\prime}=2e^{2x}(A\cos 6x+B\sin 6x)+e^{2x}(-6A\sin 6x+6B\cos 6x)=$$
$$=e^{2x}((2A+6B)\cos 6x+(2B-6A)\sin 6x);$$
$$y^{*\prime\prime}=2e^{2x}((2A+6B)\cos 6x+(2B-6A)\sin 6x)+$$
$$+e^{2x}(-6(2A+6B)\sin 6x+6(2B-6A)\cos 6x)=$$
$$=e^{2x}((4A+12B+12B-36A)\cos 6B+(4B-12A-12A-36B)\sin 6x)=$$
$$=e^{2x}((-32A+24B)\cos 6x+(-24A-32B)\sin 6B).$$

Исходное уравнение примет вид:

$$e^{2x}((-32A+24B)\cos 6x+(-24A-32B)\sin 6B)-$$
$$-4e^{2x}((2A+6B)\cos 6x+(2B-6A)\sin 6x)+4e^{2x}(A\cos 6x+B\sin 6x)=$$
$$=e^{2x}\sin 6x.$$

Сократим на e^{2x} и приведём подобные слагаемые

$$(-32A+24B-4(2A+6B)+4A)\cos 6x+$$
$$+(-24A-32B-4(2B-6A)+4B)\sin 6x=\sin 6x.$$

Приравниваем неопределённые коэффициенты у одинаковых тригонометрических функций.

$$\begin{array}{l|l} \cos 6x & -32A+24B-8A-24B+4A=0; \\ \sin 6x & -24A-32B-8B+24A+4B=1; \end{array} \Rightarrow \begin{cases} -36A=0; \\ -36B=1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0. \\ B=-\dfrac{1}{36}. \end{cases}$$

Частное решение $y^*=e^{2x}\left(0\cdot\cos 6x-\dfrac{1}{36}\cdot\sin 6x\right)$, т.е.

$$y^* = -\frac{1}{36} e^{2x} \sin 6x.$$

3) Итак, общее решение неоднородного уравнения:

$$y^* = (C_1 + C_2 x)e^{2x} - \frac{1}{36} \sin 6x.$$

Пример 15.31.

Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''' - 100y' = 20e^{10x} + 100\cos 10x.$$

Решение.

Дано ЛНДУ третьего порядка с постоянными коэффициентами с особой правой частью.

1) Найдём решение соответствующего однородного уравнения

$$y''' - 100y' = 0$$

Составляем характеристическое уравнение

$$k^3 - 100k = 0; \Leftrightarrow k\left(k^2 - 100\right) = 0; \Leftrightarrow k(k-10)(k+10) = 0.$$

Корни характеристического уравнения: $k_1 = 0$, $k_2 = 10$, $k_3 = -10$.

Общее решение имеет вид: $\overline{y} = C_1 + C_2 e^{10x} + C_3 e^{-10x}$.

2) Поскольку правая часть исходного уравнения равна сумме показательной и тригонометрической функций; т.е.

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

где $f_1(x) = 20e^{10x}$, $f_2(x) = 100\cos 10x$;

поэтому частное решение y^* ищем, пользуясь принципом наложения в виде $y^* = y_1^* + y_2^*$;

$$y_1^* = x^{r_1} \cdot Ae^{10x}$$

(в данном случае $\alpha_1 = 10$; т.к. корень характеристического уравнения $k_3 = 10 \Rightarrow r_1 = 1$), т.е. $y_1^* = Axe^{10x}$.

$$y_2^* = x^{r_2}\left(B\cos 10x + C\sin 10x\right)$$

(в данном случае $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = 10$, $\alpha_2 + i\beta_2 = 10i$; т.к. такого корня у характеристического уравнения нет, то $r_2 = 0$), т.е. $y_2^* = B\cos 10x + C\sin 10x$.

Итак, $y^* = Axe^{10x} + B\cos 10x + C\sin 10x$.

Найдём производные $y^{*\prime}$, $y^{*\prime\prime}$, $y^{*\prime\prime\prime}$ и подставим в исходное уравнение.

$y^{*\prime} = A\left(e^{10x} + x\cdot 10e^{10x}\right) - 10B\sin 10x + 10C\cos 10x;$

$y^{*\prime\prime} = A\left(10e^{10x} + 10e^{10x} + x\cdot 10^2 e^{10x}\right) - 100B\cos 10x - 100C\sin 10x =$

$= Ae^{10x}(20 + 100x) - 100B\cos 10x - 100C\sin 10x;$

$y^{*\prime\prime\prime} = A\left(10e^{10x}\cdot(20+100x) + e^{10x}\cdot 100\right) + 1000B\sin 10x - 1000C\cos 10x =$

$= Ae^{10x}(300 + 1000x) + 1000B\sin 10x - 1000C\cos 10x.$

Получим:

$Ae^{10x}(300+1000x) + 1000B\sin 10x - 1000C\cos 10x -$

$-100\left(A\left(e^{10x} + x10e^{10x}\right) - 10B\sin 10x + 10C\cos 10x\right) = 20e^{10x} + 100\cos 10x.$

Приравняем неопределённые коэффициенты при одинаковых тригонометрических и показательной функциях:

$$\begin{array}{l|l} e^{10x} & A(300+1000x) - 100A(1+10x) = 20; \\ \sin 10x & 1000B + 1000B = 0; \\ \cos 10x & -1000C - 1000C = 100. \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 200A = 20; \\ 2000B = 0; \\ -2000C = 100 \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{A} = \dfrac{1}{10}. \\ B = 0. \\ C = -\dfrac{1}{20} \end{cases}$$

Таким образом, частное решение примет вид

$$y^* = \frac{1}{10}xe^{10x} - \frac{1}{20}\sin 10x.$$

3) Следовательно, общее решение исходного уравнения будет $y = \bar{y} + y^* = C_1 + C_2e^{10x} + C_3e^{-10x} + \dfrac{1}{10}xe^{10x} - \dfrac{1}{20}\sin 10x$.

2.5.3. Метод вариации произвольных постоянных для определения частного решения ЛНДУ

Частное решение ЛНДУ (2.10) y^* можно найти, если известно общее решение $\overline{y}$, соответствующего ЛОДУ (2.11), методом вариации произвольных постоянных, который заключается в следующем.

Пусть $\overline{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ - общее решение уравнения (2.11).

Заменим в общем решении постоянные C_1 и C_2 неизвестными функциями $C_1(x)$ и $C_2(x)$, и подберём их так, чтобы функция

$$y^* = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) \qquad (2.15)$$

была решением уравнения (2.10).

Функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ находятся из системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0, \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_1' = f(x). \end{cases}$$

Рассмотренный метод применяется при решении заданий №16.

Пример 16.31.

Найти решение задачи Коши

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0.$$

Решение.

Задано линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами.

1) Найдём решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + y = 0.$$

Составляем характеристическое уравнение

$$k^2 + 1 = 0; \Leftrightarrow k^2 = -1.$$

Корни уравнения $k_1 = i$, $k_2 = -i$.

Общее решение уравнения имеет вид $\overline{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

2) Частное решение исходного уравнения методом неопределённых коэффициентов искать нельзя (функция $f(x)=\dfrac{1}{\cos x}$, в отличие от предыдущих задач № 12, 13, 14, 15, имеет другую структуру), а поэтому воспользуемся методом вариации произвольных постоянных. Будем искать решение уравнения в виде

$$y=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x,$$

где функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ нужно найти из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2=0; \\ C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'=f(x); \end{cases} \text{ где } y_1=\cos x;\ y_2=\sin x.$$

Имеем систему

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x+C_2'(x)\sin x=0; \\ C_1'(x)(-\sin x)+C_2'(x)\cos x=\dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Для решения системы воспользуемся методом Крамера, где неизвестные $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$.

$$\Delta=\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}=\cos^2 x+\sin^2 x=1;$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix}=0-\frac{\sin x}{\cos x}=-\operatorname{tg} x;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \dfrac{1}{\cos x} \end{vmatrix}=\cos x\cdot\frac{1}{\cos x}-0=1.$$

$$\begin{cases} C_1'(x)=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=-\operatorname{tg} x; \\ C_2'(x)=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x)=-\int \operatorname{tg} x\,dx=\ln|\cos x|+C_1; \\ C_2(x)=\int dx=x+C_2. \end{cases}$$

Общее решение $y=(\ln|\cos x|+C_1)\cos x+(x+C_2)\sin x$.

3. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ 2-ГО И 3-ГО ПОРЯДКОВ

Определение. **Система дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной, т.е. система вида**

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + f_1(t), \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + f_2(t), \\ x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + f_3(t). \end{cases} \tag{3.1}$$

где $x_i = x_i(t)$, $x_i' = \dfrac{dx_i}{dt}$, $f_i(t)$ **- непрерывные функции аргумента** t, a_{ij} **- постоянные коэффициенты,** $i = 1,2,3$; $j = 1,2,3$ **называется нормальной системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами 3-го порядка (неоднородной, если хотя бы одна из функций** $f_i(t) \neq 0$ **и однородной, если все функции** $f_i(t) \equiv 0$**).**

Решить эту систему означает найти функции $x_i = x_i(t)$, удовлетворяющие системе (3.1) и данным начальным условиям: $x_1(t_0) = x_{10}, x_2(t_0) = x_{20}, x_3(t_0) = x_{30}$.

Для решения нормальной системы линейных дифференциальных уравнений вида (3.1) удобно пользоваться методами линейной алгебры, а конкретнее, методом исключения неизвестных.

Методы решения приведенной системы дифференциальных уравнений рассмотрим на примерах.

Пример 17.31.

Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = -3y + \cos t - e^t, \\ y' = 4y - \cos t + 2e^t. \end{cases}$$

Решение.

В данной системе $x; y$ – неизвестные функции, а независимая переменная t – их аргумент.

Первое уравнение дифференцируем по t, после чего вместо y' подставим выражение из второго уравнения системы

$x'' = -3y' - \sin t - e^t = -3\left(4y - \cos t + 2e^t\right) - \sin t - e^t$, т.е.

$x'' = -12y + 3\cos t - 7e^t - \sin t.$

Из этого уравнения и первого уравнения исходной системы составим систему

$$\begin{cases} x' = -3y + \cos t - e^t, \\ x'' = -12y + 3\cos t - 7e^t - \sin t. \end{cases}$$

Из которой, исключим y (первое уравнение, умножив на (-4) прибавим ко второму):

$$x'' - 4x' = -\cos t - 3e^t - \sin t.$$

Полученное ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами решается стандартным способом подбора частного решения (пункт (2.5.1)).

А именно:

1) Найдём решение соответствующего однородного уравнения

$$x'' - 4x' = 0.$$

Корнями характеристического уравнения являются числа $k = 0, k = 4$, следовательно, общее решение имеет вид:

$$\bar{x} = C_1 + C_2 e^{4t}.$$

2) Поскольку правая часть исходного уравнения равна сумме показательной и тригонометрической функций:

$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, где $f_1(t) = -3e^t$, $f_2(t) = -\cos t - \sin t$,

поэтому частное решение x^* ищем, пользуясь принципом наложения решений в виде $x^* = x_1^* + x_2^*$; где $x_1^* = Ae^t$, $x_2^* = B\cos t + C\sin t$; получим $x^* = Ae^t + B\cos t + C\sin t$.

Найдём производные $(x^*)'$, $(x^*)''$ и подставим в ЛНДУ:

$(x^*)' = Ae^t - B\sin t + C\cos t$,

$(x^*)'' = Ae^t - B\cos t - C\sin t$,

$Ae^t - B\cos t - C\sin t - 4\left(Ae^t - B\sin t + C\cos t\right) = -3e^t - \cos t - \sin t$.

Приравниваем неопределённые коэффициенты при одинаковых функциях, получим:

$$\left.\begin{array}{r|l} e^t: & -3A = -3, \\ \cos t: & -4C - B = -1, \\ \sin t: & 4B - C = -1, \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} A = 1, \\ B = -\dfrac{3}{17}, \\ C = \dfrac{5}{17}. \end{cases}$$

Отсюда $x^* = e^t - \dfrac{3}{17}\cos t + \dfrac{5}{17}\sin t$.

Окончательно, $x = \bar{x} + x^* = C_1 + C_2 e^{4t} + e^t - \dfrac{3}{17}\cos t + \dfrac{5}{17}\sin t$.

Другую функцию $y(t)$ найдём из первого уравнения нормальной системы $y = \dfrac{1}{3}\left(-x' + \cos t - e^t\right)$.

Учитывая, что

$$x' = \left(C_1 + C_2 e^{4t} + e^t - \frac{3}{17}\cos t + \frac{5}{17}\sin t\right)' = 4C_2 e^{4t} + e^t + \frac{3}{17}\sin t + \frac{5}{17}\cos t.$$

получим $y = \dfrac{1}{3}\left(-4C_2 e^{4t} - e^t - \dfrac{3}{17}\sin t - \dfrac{5}{17}\cos t + \cos t - e^t\right)$,

т.е. $y = -\dfrac{4}{3}C_2 e^{4t} - \dfrac{1}{17}\sin t + \dfrac{4}{17}\cos t - \dfrac{2}{3}e^t$.

Т.о., общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{4t} + e^t - \dfrac{3}{17}\cos t + \dfrac{5}{17}\sin t, \\ y = -\dfrac{4}{3}C_2 e^{4t} - \dfrac{2}{3}e^t + \dfrac{4}{17}\cos t - \dfrac{1}{17}\sin t. \end{cases}$$

Пример 18.31.

Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = -2x - 2y - 4z, \\ y' = -2x + y - 2z, \\ z' = 5x + 2y + 7z. \end{cases}$$

Решение.

В данной системе $x; y; z$ – неизвестные функции, а независимая переменная t – их аргумент.

Дифференцируя первое уравнение системы по t:

$$x'' = -2x' - 2y' - 4z'.$$

Вместо y' и z' подставим их выражения из второго и третьего уравнений системы. Получаем

$$x'' = -2x' - 2(-2x + y - 2z) - 4(5x + 2y + 7z),$$

откуда

$$x'' = -2x' - 16x - 10y - 24z.$$

Полученное уравнение дифференцируем по t; а вместо y' и z' подставим выражения из исходной системы уравнений:

$x''' = -2x'' - 16x' - 10y' - 24z' =$

$= -2x'' - 16x' - 10(-2x + y - 2z) - 24(5x + 2y + 7z),$

т.е. $x''' = -2x'' - 16x' - 100x - 58x - 148z$.

Составим новую систему, которая состоит из первого уравнения исходной системы и двух уравнений, полученных последовательным дифференцированием:

$$\begin{cases} x' = -2x - 2y - 4z, \\ x'' = -2x' - 16x - 10y - 24z, \\ x''' = -2x'' - 16x' - 100x - 58y - 148z. \end{cases}$$

Из этой системы исключим неизвестные y и z. Для этого проще использовать первые два уравнения системы, находим

$$\begin{cases} 2y = x'' - 4x' + 4x, \\ 4z = -x'' + 3x' - 6x. \end{cases}$$

И эти выражения подставим в третье уравнение системы $x''' = -2x'' - 16x' - 100x - 29(x'' - 4x' + 4x) - 37(-x'' + 3x' - 6x)$.

После приведения подобных слагаемых получаем ЛОДУ третьего порядка, относительно неизвестной функции $x = x(t)$.

$$x''' - 6x'' + 11x' - 6x = 0.$$

Корнями его характеристического уравнения

$$k^3 - 6k^2 + 11k - 6 = 0$$

являются числа $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 3$, т.к.

$$k^3 - 6k^2 + 5k + 6k - 6 = 0, \Leftrightarrow k(k^2 - 6k + 5) + 6(k - 1) = 0,$$

$$\Leftrightarrow k(k-1)(k-5) - 6(k-1) = 0, \Leftrightarrow (k-1)(k^2 - 5k + 6) = 0.$$

Следовательно, общее решение последнего уравнения имеет вид

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}.$$

Теперь надо получить значение для y и z.

Это легко сделать, имея в виду систему, содержащую $2y$ и $4z$, выраженную через x, x' и x''.

Поэтому сначала находим

$x' = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t} + 3C_3 e^t$,

$x'' = C_1 e^t + 4C_2 e^{2t} + 9C_3 e^{3t}$.

Остаётся сделать соответствующие подстановки:

$y = 0{,}5(x'' - 4x' + 4x) = 0{,}5(C_1 e^t + 4C_2 e^{2t} + 9C_3 e^{3t} - 4C_1 e^t -$

$-8C_2 e^{2t} - 12C_3 e^{3t} + 4C_1 e^t + 4C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t})$,

откуда $y = 0{,}5C_1 e^t + 0{,}5C_3 e^{3t}$.

Аналогично, $z = 0{,}25(-x'' - 3x' - 6x) = -C_1 e^t - C_2 e^{2t} - 1{,}5C_3 e^{3t}$.

Окончательно, $\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}, \\ y = 0{,}5C_1 e^t + 0{,}5C_3 e^{3t}, \\ z = -C_1 e^t - C_2 e^{2t} - 1{,}5C_3 e^{3t}. \end{cases}$

4. ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) широко применяются в механике, теории устойчивости, физике, электротехнике и практически во всех технических науках, а в последнее время и в науках социального профиля – экономике, экологии и пр.

Решение геометрических и физических задач, требующих составления дифференциальных уравнений, обычно вызывает затруднения: специфика конкретных физических задач требует знания разнообразных законов физики. Универсального метода составления дифференциального уравнения, пригодного во всех случаях, указать нельзя, можно лишь дать некоторые общие указания.

При этом отметим два подхода к составлению ОДУ:

1) используется понятие первой производной как углового коэффициента касательной в геометрических задачах, скорости движения в механических задачах, скорости реакций в химических задачах, скорости охлаждения тела и удельной теплоемкости в теплотехнике, скорости изменения силы тока в электротехнике и т.д.; используется понятие второй производной как ускорения в механических задачах.

2) используются бесконечно малые приращения исследуемых величин, которые заменяются затем на соответствующие дифференциалы, образуя тем самым необходимое ОДУ.

Рассмотрим некоторые из этих задач, чтобы показать на примерах, как составляются дифференциальные уравнения.

Охлаждение тела. *Согласно закону, установленному Ньютоном, скорость охлаждения тела пропорциональна разности между температурой тела и температурой окружающей среды.*

Пусть тело нагрето до температуры T_0; температуру окружающей среды будем считать постоянной и равной $T_c (T_c < T_0)$. Найдем зависимость между изменяющейся температурой T тела и временем охлаждения t.

Пусть в момент времени t температура тела равна T. Скорость изменения температуры, т.е. $\frac{dT}{dt}$, по закону Ньютона пропорциональна разности $(T-T_c)$, следовательно, $\frac{dT}{dt}=-k(T-T_c)$.

Знак минус выбран потому, что с возрастанием t температура T тела уменьшается. Коэффициент пропорциональности k зависит как от физических свойств тела, так и от его геометрической формы.

Разделяя переменные, получим $\frac{dT}{T-T_c}=-kdt$. Отсюда

$$\ln(T-T_c)=-kt+\ln C \Rightarrow T=T_c+Ce^{-kt}.$$

Подставляя начальное условие $T\big|_{t=0}=T_0$, найдем $C: T_0=T_c+C$, т.е. $C=T_0-T_c$. Окончательно закон охлаждения имеет вид

$$T=T_c+(T_0-T_c)e^{-kt}.$$

Задача динамики материальной точки. Пусть материальная точка движется прямолинейно под действием некоторой силы, направленной вдоль линии движения точки. *Согласно второму закону Ньютона произведение массы на ускорение равно действующей силе:* $ma=F$. Так как $a=\frac{d^2s}{dt^2}$, где t - время, а s - путь, то при отыскании закона движения мы приходим к дифференциальному уравнению второго порядка $m\frac{d^2s}{dt^2}=F$.

В обычно встречающихся задачах сила F может зависеть от времени t, расстояния s и скорости движения $v=\frac{ds}{dt}$.

Равномерно ускоренное движение. Пусть сила F постоянна. Тогда $\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{F}{m}$. Интегрируя, получим: $\frac{ds}{dt}=\frac{F}{m}t+C_1$ и $s=\frac{F}{m}\cdot\frac{t^2}{2}+C_1t+C_2$.

Движение точки в среде с сопротивлением. Как показывает опыт, всякое тело испытывает при движении в среде сопротивление со стороны этой среды. Сила сопротивления возрастает со скоростью тела и зависит как от свойств среды, так и от размеров и формы движущегося тела. Если скорость движения невелика и тело имеет малые размеры, то силу сопротивления можно считать пропорциональной скорости v: $F_c = -kv$.

Коэффициент пропорциональности $k > 0$, а знак минус указывает, что сила сопротивления всегда направлена против движения. Если скорость движения велика, то сила сопротивления становится пропорциональной квадрату скорости, т.е. $F_c = -kv^2$.

Пример. Найти закон прямолинейного движения материальной точки массы *m*, если известно, что работа действующей на точку силы пропорциональна времени *t*, протекающему от начала движения (коэффициент пропорциональности *k*). Начальный путь и начальная скорость равны соответственно s_0 и v_0.

Из курса механики известно, что в случае прямолинейного перемещения точки, когда направления силы и скорости совпадают, работа $A = \int_{S_0}^{S} F(u)du$, где $F(s)$- действующая на точку сила. По условию задачи, $A = kt$. Сравнивая оба выражения для A, находим $\int_{S_0}^{S} F(u)du = kt$.

Дифференцируя по *s* получаем: $F(s) = k\frac{dt}{ds}$, а так как $\frac{ds}{dt} = v$ (скорость движения) и $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{ds/dt} = \frac{1}{v}$, то $F(s) = \frac{k}{v}$.

С другой стороны, из второго закона Ньютона следует, что $F(s) = m\frac{dv}{dt}$.

Сравнивая оба выражения для $F(s)$, составляем дифференциальное уравнение: $m\frac{dv}{dt}=\frac{k}{v}$.

Это дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными, следовательно $\frac{mv^2}{2}=kt+C_1$.

Из начального условия $v=v_0$ при $t=0$ находим, что $C_1=\frac{mv_0^2}{2}$, и потому $v=\sqrt{\frac{2k}{m}t+v_0^2}$.

Заменяя $v=\frac{ds}{dt}$ и интегрируя, получим $s=\frac{m}{3k}\left(\frac{2k}{m}t+v_0^2\right)^{3/2}+C_2$.

Из начального условия $s=s_0$ при $t=0$ находим, что $C_2=s_0-\frac{mv_0^2}{3k}$, и закон движения точки окончательно примет вид:

$$s=\frac{m}{3k}\left(\frac{2k}{m}t+v_0^2\right)^{3/2}+s_0-\frac{mv_0^2}{3k}.$$

Геометрическая задача. Найти кривую, у которой наклон в любой точке на две единицы меньше абсциссы точки касания, зная, что кривая проходит через точку $A(2;0)$.

Примем абсциссу x произвольной точки кривой за аргумент, а ординату y той же точки – за функцию, тогда уравнение кривой запишется в виде $y=f(x)$. Поскольку угловой коэффициент касательной к этой кривой в любой точке по определению равен производной, т.е. dy/dx, а именно он и определяет наклон кривой, то условия задачи позволяют составить соотношение: $\frac{dy}{dx}=x-2$.

Это дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными, решая которое (см п.1.2), находим общее решение в виде $y=\frac{(x-2)^2}{2}+C$.

Полученное выражение определяет семейство парабол. Выделим из полученного семейства ту параболу, которая проходит через точку $A(2;0)$. Подставляя координаты $x = 2, y = 0$ в общее решение, имеем $C = 0$, таким образом, искомое уравнение кривой:

$$y = \frac{1}{2}(x-2)^2.$$

Вентиляция помещений. В учебном классе вместимостью $3\times10\times6 = 180 м^3$ воздух содержит 0,12% углекислоты. Кондиционер доставляет свежий воздух, содержащий 0,04% углекислоты, в количестве $a \quad м^3 / мин$. Какова должна быть мощность кондиционера, чтобы по истечении 10 минут содержание углекислоты не превышало 0,06%, предполагая, что концентрация углекислоты во всех частях класса в каждый момент времени одна и та же.

Обозначим содержание углекислоты в воздухе в момент времени t через $x\%$. За промежуток времени dt минут, кондиционер может доставить в класс $0{,}0004adt$ м^3 углекислоты, а уходит из класса $0{,}01xadt\, м^3$ углекислоты. Следовательно, всего за dt минут количество углекислоты в воздухе уменьшилось на $(0{,}01x - 0{,}0004)adt$. Обозначив через dx процентное уменьшение содержания углекислоты в воздухе, можно подсчитать это же количество углекислоты другим путем по формуле $-180\cdot 0{,}01dx\, м^3$ (знак минус берется потому, что $dx < 0$).

Приравнивая друг другу оба выражения, составим дифференциальное уравнение $(0{,}01x - 0{,}0004)adt = -180\cdot 0{,}01dx$.

Разделяя переменные, найдем $-\dfrac{adt}{180} = \dfrac{dx}{x - 0{,}04}$.

Общий интеграл: $x - 0{,}04 = Ce^{-at/180}$.

Т.к. при $t = 0, x = 0{,}12$, то $C = 0{,}08$.

Для определения мощности a кондиционера положим $x = 0{,}06$ и $t = 10$, получим $a = 18\ln 4 \approx 25 м^3 / мин$.

Радиоактивный распад. Экспериментальным путем установлено, что *скорость радиоактивного распада пропорциональна количеству нераспавшегося вещества.* Считая, что начальное количество вещества равно M_0, найдем зависимость между количеством нераспавшегося вещества M и временем t.

Скорость радиоактивного распада равна производной от количества вещества M по времени t, т.е. $\frac{dM}{dt}$. Но по условию $\frac{dM}{dt} = -kM$, где k – коэффициент пропорциональности. Знак минус берется потому, что с возрастанием t количество вещества M уменьшается.

Разделим переменные в полученном уравнении: $\frac{dM}{M} = -kdt$.

Интегрируя, получим $\ln M = -kt + \ln C$, откуда $M = Ce^{-kt}$.

Подставляя начальное условие, найдём C.

Для того чтобы узнать, какое количество вещества осталось нераспавшимся, например через 10 минут после начала опыта, достаточно в эту формулу подставить $t = 10$.

Переходный процесс в электрической цепи. В цепи с индуктивностью происходит переходный процесс. Индуктивность L и активное сопротивление R постоянны. Напряжение U задано как функция от времени t: $U = f(t)$. Начальный ток равен i_0. Найти зависимость тока i от времени t.

Так как ток i в цепи изменяется со временем, то вследствие наличия индуктивности L возникает э.д.с. самоиндукции $e_L = -L \cdot \frac{di}{dt}$. По закону Кирхгофа падение напряжения в цепи Ri равно сумме э.д.с. $U - L \cdot \frac{di}{dt}$, таким образом, $U - L \cdot \frac{di}{dt} = Ri$, или

$$L\frac{di}{dt} + Ri = U.$$

Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Заменив U через $f(t)$ и разделив обе части уравнения на L, получим:

$$\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=\frac{f(t)}{L}.$$

Частным решением этого линейного уравнения, удовлетворяющего начальному условию $i=i_0$ при t=0, является функция (см. пункт 1.4.):

$$i=e^{-\frac{Rt}{L}}\left(i_0+\frac{1}{L}\int_0^t f(t)\cdot e^{\frac{Rt}{L}}dt\right).$$

Приведенные примеры иллюстрируют подход для составления и решения заданий №20.

5. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО РАЗДЕЛУ

Задание 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения. (Ответ представить в виде $\psi(x;y)=C$).

1. $4xdx-3ydy=3x^2ydy-2xy^2dx.$
2. $x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0.$
3. $4\sqrt{1+y^2}dx-ydy=x^2ydy.$
4. $\sqrt{3+y^2}dx-ydy=x^2ydy.$
5. $6xdx-6ydy=2x^2ydy-3xy^2dx.$
6. $x\sqrt{3+y^2}dx+y\sqrt{2+x^2}dy=0.$
7. $(e^{2x}+5)dy+ye^{2x}dx=0.$
8. $y'y\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}+1=0.$
9. $6xdx-6ydy=3x^2ydy-2xy^2dx.$
10. $x\sqrt{5+y^2}dx+y\sqrt{4+x^2}dy=0.$
11. $y(4+e^x)dy-e^xdx=0.$
12. $\sqrt{4-x^2}y'+xy^2+x=0.$

13. $2xdx-2ydy=x^2ydy-2xy^2dx.$

14. $x\sqrt{4+y^2}dx+y\sqrt{1+x^2}dy=0.$

15. $(e^x+8)dy-ye^xdx=0.$

16. $\sqrt{5+y^2}+y'y\sqrt{1-x^2}=0.$

17. $6xdx-ydy=yx^2dy-3xy^2dx.$

18. $y\ln y+xy'=0.$

19. $(1+e^x)y'=ye^x.$

20. $\sqrt{1-x^2}y'+xy^2+x=0.$

21. $6xdx-2ydy=2x^2ydy-3xy^2dx.$

22. $y(1+\ln y)+xy'=0.$

23. $(3+e^x)yy'=e^x.$

24. $\sqrt{3+y^2}+\sqrt{1-x^2}yy'=0.$

25. $xdx-ydy=yx^2dy-xy^2dx.$

26. $\sqrt{5+y^2}dx+4(x^2y+y)dy=0.$

27. $(1+e^x)yy'=e^x.$

28. $3(x^2y+y)dy+\sqrt{2+y^2}dx=0.$

29. $2xdx-ydy=yx^2dy-xy^2dx.$

30. $2x+2xy^2+\sqrt{2-x^2}y'=0.$

31. $20xdx-3ydy=3x^2ydy-5xy^2dx.$

Задание 2. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

1. $y'=\dfrac{y^2}{x^2}+4\dfrac{y}{x}+2.$

2. $xy'=\dfrac{3y^3+2yx^2}{2y^2+x^2}.$

17. $2y'=\dfrac{y^2}{x^2}+8\dfrac{y}{x}+8.$

18. $xy'=\dfrac{3y^3+10yx^2}{2y^2+5x^2}.$

3. $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

4. $xy' = \sqrt{x^2+y^2} + y$.

5. $2y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 6\dfrac{y}{x} + 3$.

6. $xy' = \dfrac{3y^3+4yx^2}{2y^2+2x^2}$.

7. $y' = \dfrac{x+2y}{2x-y}$.

8. $xy' = 2\sqrt{x^2+y^2} + y$.

9. $3y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 8\dfrac{y}{x} + 4$.

10. $xy' = \dfrac{3y^3+6yx^2}{2y^2+3x^2}$.

11. $y' = \dfrac{x^2+xy-y^2}{x^2-2xy}$.

12. $xy' = \sqrt{2x^2+y^2} + y$.

13. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 6\dfrac{y}{x} + 6$.

14. $xy' = \dfrac{3y^3+8yx^2}{2y^2+4x^2}$.

15. $y' = \dfrac{x^2+2xy-y^2}{2x^2-2xy}$.

16. $xy' = 3\sqrt{x^2+y^2} + y$.

19. $y' = \dfrac{x^2+3xy-y^2}{3x^2-2xy}$.

20. $xy' = 3\sqrt{2x^2+y^2} + y$.

21. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 8\dfrac{y}{x} + 12$.

22. $xy' = \dfrac{3y^3+12yx^2}{2y^2+6x^2}$.

23. $y' = \dfrac{x^2+xy-3y^2}{x^2-4xy}$.

24. $xy' = 2\sqrt{3x^2+y^2} + y$.

25. $4y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 10\dfrac{y}{x} + 5$.

26. $xy' = \dfrac{3y^3+14yx^2}{2y^2+7x^2}$.

27. $y' = \dfrac{x^2+xy-5y^2}{x^2-6xy}$.

28. $xy' = 4\sqrt{x^2+y^2} + y$.

29. $3y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 10\dfrac{y}{x} + 10$.

30. $xy' = 4\sqrt{2x^2+y^2} + y$.

31. $y' = \dfrac{x^2+2xy-5y^2}{2x^2-6xy}$.

Задание 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

1. $y' = \dfrac{x+2y-3}{2x-2}$.

2. $y' = \dfrac{x+y-2}{2x-2}$.

3. $y' = \dfrac{3y-x-4}{3x+3}$.

4. $y' = \dfrac{2y-2}{x+y-2}$.

5. $y' = \dfrac{x+y-2}{3x-y-2}$.

6. $y' = \dfrac{2x+y-3}{x-1}$.

7. $y' = \dfrac{x+7y-8}{9x-y-8}$.

8. $y' = \dfrac{x+3y+4}{3x-6}$.

9. $y' = \dfrac{3y+3}{2x+y-1}$.

10. $y' = \dfrac{x+2y-3}{4x-y-3}$.

11. $y' = \dfrac{x-2y+3}{-2x-2}$.

12. $y' = \dfrac{x+8y-9}{10x-y-9}$.

13. $y' = \dfrac{2x+3y-5}{5x-5}$.

14. $y' = \dfrac{4y-8}{3x+2y-7}$.

15. $y' = \dfrac{x+3y-4}{5x-y-4}$.

16. $y' = \dfrac{y-2x+3}{x-1}$.

17. $y' = \dfrac{x+2y-3}{x-1}$.

18. $y' = \dfrac{3x+2y-1}{x+1}$.

19. $y' = \dfrac{5y+5}{4x+3y-1}$.

20. $y' = \dfrac{x+4y-5}{6x-y-5}$.

21. $y' = \dfrac{x+y+2}{x+1}$.

22. $y' = \dfrac{2x+y-3}{4x-4}$.

23. $y' = \dfrac{2x+y-3}{2x-2}$.

24. $y' = \dfrac{y}{2x+2y-2}$.

25. $y' = \dfrac{x+5y-6}{7x-y-6}$.

26. $y' = \dfrac{x+y-4}{x-2}$.

27. $y' = \dfrac{2x+y-1}{2x-2}$.

28. $y' = \dfrac{3y-2x+1}{3x+3}$.

29. $y' = \dfrac{6y-6}{5x+4y-9}$.

30. $y' = \dfrac{x+6y-7}{8x-y-7}$.

31. $y' = \dfrac{y+2}{2x+y-4}$.

Задание 4. Найти решение задачи Коши.

1. $y' - \dfrac{y}{x} = x^2,\ y(1) = 0.$
2. $y' - yctgx = 2x\sin x,\ y(\pi/2) = 0.$
3. $y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x,\ y(0) = 0.$
4. $y' + ytgx = \cos^2 x,\ y(\pi/4) = \dfrac{1}{2}.$
5. $y' - \dfrac{y}{x+2} = x^2 + 2x,\ y(-1) = \dfrac{3}{2}.$
6. $y' - \dfrac{1}{x+1}y = e^x(x+1),\ y(0) = 1.$
7. $y' - \dfrac{y}{x} = x\sin x,\ y(\pi/2) = 1.$
8. $y' + \dfrac{y}{x} = \sin x,\ y(\pi) = \dfrac{1}{\pi}.$
9. $y' - \dfrac{y}{2x} = x^2,\ y(1) = 1.$
10. $y' + \dfrac{2x}{1+x^2}y = \dfrac{2x^2}{1+x^2},\ y(0) = \dfrac{2}{3}.$
11. $y' - \dfrac{2x-5}{x^2}y = 5,\ y(2) = 4.$
12. $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{x+1}{x}e^x,\ y(1) = e.$
13. $y' - \dfrac{y}{x} = -2\dfrac{\ln x}{x},\ y(1) = 1.$
14. $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{12}{x^3},\ y(1) = 4.$
15. $y' + \dfrac{2}{x}y = x^3,\ y(1) = -\dfrac{5}{6}.$
16. $y' + \dfrac{y}{x} = 3x,\ y(1) = 1.$

17. $y' - \dfrac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2,\ y(1) = 3.$

18. $y' + \dfrac{1-2x}{x^2}\, y = 1,\ y(1) = 1.$

19. $y' + \dfrac{3y}{x} = \dfrac{2}{x^3},\ y(1) = 1.$

20. $y' + 2xy = -2x^3,\ y(1) = e^{-1}.$

21. $y' + \dfrac{xy}{2(1-x^2)} = \dfrac{x}{2},\ y(0) = \dfrac{2}{3}.$

22. $y' + xy = -x^3,\ y(0) = 3.$

23. $y' - \dfrac{2}{x+1} = e^x (x+1)^2,\ y(0) = 1.$

24. $y' + 2xy = xe^{-x^2} \sin x,\ y(0) = 1.$

25. $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3,\ y(0) = \dfrac{1}{2}.$

26. $y' - y\cos x = -\sin 2x,\ y(0) = 3.$

27. $y' - 4xy = -4x^3,\ y(0) = -\dfrac{1}{2}.$

28. $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{\ln x}{x},\ y(1) = 1.$

29. $y' - 3x^2 y = \dfrac{x^2(1+x^3)}{3},\ y(0) = 0.$

30. $y' - y\cos x = \sin 2x,\ y(0) = -1.$

31. $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{2}{x^2},\ y(1) = 1.$

Задание 5. Решить задачу Коши.

1. $y^2 dx + (x + e^{2/y}) dy = 0,\ y|_{x=e} = 2.$

2. $(y^4 e^y + 2x) y' = y,\ y|_{x=0} = 1.$

3. $y^2 dx + (xy - 1) dy = 0,\ y|_{x=1} = e.$

4. $2(4y^2+4y-x)y'=1, y|_{x=0}=0.$

5. $(\cos 2y\cos^2 y-x)y'=\sin y\cos y, y|_{x=1/4}=\pi/3.$

6. $(x\cos^2 y-y^2)y'=y\cos^2 y, y|_{x=\pi}=\pi/4.$

7. $e^{y^2}(dx-2xydy)=ydy, y|_{x=0}=0.$

8. $(104y^3-x)y'=4y, y|_{x=8}=1.$

9. $dx+(xy-y^3)dy=0, y|_{x=-1}=0.$

10. $(3y\cos 2y-2y^2\sin 2y-2x)y'=y, y|_{x=16}=\pi/4.$

11. $8(4y^3+xy-y)y'=1, y|_{x=0}=0.$

12. $(2\ln y-\ln^2 y)dy=ydx-xdy, y|_{x=4}=e^2.$

13. $2(x+y^4)y'=y, y|_{x=-2}=-1.$

14. $y^3(y-1)dx+3xy^2(y-1)dy=(y+2)dy, y|_{x=1/4}=2.$

15. $2y^2dx+(x+e^{1/y})dy=0, y|_{x=e}=1.$

16. $(xy+\sqrt{y})dy+y^2dx=0, y|_{x=-1/2}=4.$

17. $\sin 2ydx=(\sin^2 2y-2\sin^2 y+2x)dy, y|_{x=-1/2}=\pi/4.$

18. $(y^2+2y-x)y'=1, y|_{x=2}=0.$

19. $2y\sqrt{y}dx-(6x\sqrt{y}+7)dy=0, y|_{x=-4}=1.$

20. $dx=(\sin y+3\cos y+3x)dy, y|_{x=e^{\pi/2}}=\pi/2.$

21. $2(\cos^2 y\cdot\cos 2y-x)y'=\sin 2y, y|_{x=3/2}=5\pi/4.$

22. $chydx=(1+xshy)dy, y|_{x=1}=\ln 2.$

23. $(13y^3-x)y'=4y, y|_{x=5}=1.$

24. $y^2(y^2+4)dx+2xy(y^2+4)dy=2dy, y|_{x=\pi/8}=2.$

25. $(x+\ln^2 y-\ln y)y'=\dfrac{y}{2}, y|_{x=2}=1.$

26. $(2xy+\sqrt{y})dy+2y^2dx=0, y|_{x=-1/2}=1.$

27. $ydx+(2x-2\sin^2 y-y\sin 2y)dy=0, y|_{x=3/2}=\pi/4.$

28. $2(y^3-y+xy)dy=dx, y|_{x=-2}=0.$

29. $(2y + xtgy - y^2 tgy)dy = dx,\ y|_{x=0} = \pi.$

30. $4y^2 dx + (e^{\frac{1}{2y}} + x)dy = 0,\ y|_{x=e} = \frac{1}{2}.$

31. $dx + (2x + \sin 2y - 2\cos^2 y)dy = 0,\ y|_{x=-1} = 0.$

Задание 6. Найти решение задачи Коши.

1. $y' + xy = (1+x)e^{-x} y^2,\ y(0) = 1.$
2. $xy' + y = 2y^2 \ln x,\ y(1) = \frac{1}{2}.$
3. $2(xy' + y) = xy^2,\ y(1) = 2.$
4. $y' + 4x^3 y = 4(x^3 + 1)e^{-4x} y^2,\ y(0) = 1.$
5. $xy' - y = -y^2 (\ln x + 2)\ln x,\ y(1) = 1.$
6. $2(y' + xy) = (1+x)e^{-x} y^2,\ y(0) = 2.$
7. $3(xy' + y) = y^2 \ln x,\ y(1) = 3.$
8. $2y' + y\cos x = y^{-1} \cos x(1 + \sin x),\ y(0) = 1.$
9. $y' + 4x^3 y = 4y^2 e^{4x}(1 - x^3),\ y(0) = -1.$
10. $3y' + 2xy = 2xy^{-2} e^{-2x^2},\ y(0) = -1.$
11. $2xy' - 3y = -(5x^2 + 3)y^3,\ y(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$
12. $3xy' + 5y = (4x - 5)y^4,\ y(1) = 1.$
13. $2y' + 3y\cos x = e^{2x}(2 + 3\cos x)y^{-1},\ y(0) = 1.$
14. $3(xy' + y) = xy^2,\ y(1) = 3.$
15. $y' - y = 2xy^2,\ y(0) = \frac{1}{2}.$
16. $2xy' - 3y = -(20x^2 + 12)y^3,\ y(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$
17. $y' + 2xy = 2x^3 y^3,\ y(0) = \sqrt{2}.$
18. $xy' + y = y^2 \ln x,\ y(1) = 1.$

19. $2y'+3y\cos x=(8+12\cos x)e^{2x}y^{-1}$, $y(0)=2$.

20. $4y'+x^3y=(x^3+8)e^{-2x}y^2$, $y(0)=1$.

21. $8xy'-12y=-(5x^2+3)y^3$, $y(1)=\sqrt{2}$.

22. $2(y'+y)=xy^2$, $y(0)=2$.

23. $y'+xy=(x-1)e^xy^2$, $y(0)=1$.

24. $2y'-3y\cos x=-e^{-2x}(2+3\cos x)y^{-1}$, $y(0)=1$.

25. $y'-y=xy^2$, $y(0)=1$.

26. $2(xy'+y)=y^2\ln x$, $y(1)=2$.

27. $y'+y=xy^2$, $y(0)=1$.

28. $y'+2ycthx=y^2chx$, $y(1)=\dfrac{1}{sh1}$.

29. $2(y'+xy)=(x-1)e^xy^2$, $y(0)=2$.

30. $y'-ytgx=-\left(\dfrac{2}{3}\right)y^4\sin x$, $y(0)=1$.

31. $xy'+y=xy^2$, $y(1)=1$.

Задание 7. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

1. $3x^2e^ydx+(x^3e^y-1)dy=0$.

2. $\left(3x^2+\dfrac{2}{y}\cos\dfrac{2x}{y}\right)dx-\dfrac{2x}{y^2}\cos\dfrac{2x}{y}dy=0$.

3. $(3x^2+4y^2)dx+(8xy+e^y)dy=0$.

4. $\left(2x-1-\dfrac{y}{x^2}\right)dx-\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)dy=0$.

5. $(y^2+y\sec^2x)dx+(2xy+tgx)dy=0$.

6. $(3x^2y+2y+3)dx+(x^3+2x+3y^2)dy=0$.

7. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)dx+\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{x}{y^2}\right)dy=0$.

8. $(\sin 2x - 2\cos(x+y))dx - 2\cos(x+y)dy = 0.$

9. $\left(xy^2 + \frac{x}{y^2}\right)dx + \left(x^2 y - \frac{x^2}{y^3}\right)dy = 0.$

10. $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4}\right)dx - \frac{2y}{x^3}dy = 0.$

11. $\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}dx - \left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} + 2y\right)dy = 0.$

12. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\right)dx + \left(x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy = 0.$

13. $\frac{1+xy}{x^2 y}dx + \frac{1-xy}{xy^2}dy = 0.$

14. $\frac{dx}{y} - \frac{x+y^2}{y^2}dy = 0.$

15. $\frac{y}{x^2}dx - \frac{xy+1}{x}dy = 0.$

16. $\left(xe^x + \frac{y}{x^2}\right)dx - \frac{1}{x}dy = 0.$

17. $\left(10xy - \frac{1}{\sin y}\right)dx + \left(5x^2 + \frac{x\cos y}{\sin^2 y} - y^2 \sin y^3\right)dy = 0.$

18. $\left(\frac{y}{x^2+y^2} + e^x\right)dx - \frac{xdy}{x^2+y^2} = 0.$

19. $e^y dx + (\cos y + xe^y)dy = 0.$

20. $(y^3 + \cos x)dx + (3xy^2 + e^y)dy = 0.$

21. $xe^{y^2}dx + (x^2 ye^{y^2} + tg^2 y)dy = 0.$

22. $(5xy^2 - x^3)dx + (5x^2 y - y)dy = 0.$

23. $(\cos(x+y^2) + \sin x)dx + 2y\cos(x+y^2)dy = 0.$

24. $(x^2 - 4xy - 2y^2)dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)dy = 0.$

25. $\left(\sin y + y\sin x + \frac{1}{x}\right)dx + \left(x\cos y - \cos x + \frac{1}{y}\right)dy = 0.$

26. $\left(1 + \frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\right)dx + \left(1 - \frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}\right)dy = 0.$

27. $\frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2 + y^2} = 0.$

28. $2(3xy^2 + 2x^3)dx + 3(2x^2 y + y^2)dy = 0.$

29. $(3x^3 + 6x^2 y + 3xy^2)dx + (2x^3 + 3x^2 y)dy = 0.$

30. $xy^2 dx + y(x^2 + y^2)dy = 0.$

31. $\frac{xdx + ydy + (xdy - ydx)}{\left(x^2 + y^2\right)} = 0.$

Задание 8. Для данного дифференциального уравнения методом изоклин построить интегральную кривую, проходящую через точку M.

1. $y' = y - x^2, M(1,2).$
2. $yy' = -2x, M(0,5).$
3. $y' = 2 + y^2, M(1,2).$
4. $y' = \frac{2x}{3y}, M(1,1).$
5. $y' = (y-1)x, M\left(1, \frac{3}{2}\right).$
6. $yy' + x = 0, M(-2,-3).$
7. $y' = 3 + y^2, M(1,2).$
8. $xy' = 2y, M(2,3).$
9. $y'(x^2 + 2) = y, M(2,2).$
10. $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0, M(2,1).$
16. $2(y + y') = x + 3, M\left(1, \frac{1}{2}\right).$
17. $y' = x + 2y, M(3,0).$
18. $xy' = 2y, M(1,3).$
19. $3yy' = x, M(-3,-2).$
20. $y' = y - x^2, M(-3,4).$
21. $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0, M(-2,1).$
22. $y' = x^2 - y, M\left(2, \frac{3}{2}\right)$
23. $y' = y - x, M(2,1).$
24. $yy' = -x, M(2,3).$
25. $y' = y - x, M(4,2).$
26. $3yy' = x, M(1,1).$

11. $y' = y - x, M\left(\frac{9}{2}, 1\right).$

12. $y' = x^2 - y, M\left(1, \frac{1}{2}\right).$

13. $y' = xy, M(0, -1).$

14. $y' = xy, M(0, 1).$

15. $yy' = -\frac{x}{2}, M(4, 2).$

27. $y' = x^2 - y, M(0, 1).$

28. $y' = 3y^{\frac{2}{3}}, M(1, 3).$

29. $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0, M(-2, -1).$

30. $y' = x(y-1), M\left(1, \frac{1}{2}\right).$

31. $y' = x + 2y, M(1, 2).$

Задание 9. Найти решение задачи Коши.

1. $y'' = x + \frac{1}{x^3}$; $y(1) = 0$; $y'(1) = -1$.
2. $y'' = e^x$; $y(0) = -1$; $y'(0) = 2$.
3. $y'' = \cos x$; $y(0) = -1$; $y'(0) = 5$.
4. $y'' = \frac{1}{1+x^2}$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 2$.
5. $y'' = \operatorname{sh} x$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 3$.
6. $y'' = 0$; $y(-1) = 4$; $y'(-1) = 3$.
7. $y'' = e^{-2x}$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 3$.
8. $y'' = \frac{x^2}{1+x^2}$; $y(0) = -2$; $y'(0) = -4$.
9. $y'' = 3\cos^2 x$; $y(0) = -1$; $y'(0) = -4$.
10. $y'' = \sqrt[3]{(x+1)^2}$; $y(0) = 0$; $y'(0) = -\frac{2}{3}$.
11. $y'' = 1 - \cos 3x$; $y(0) = 0$; $y'(0) = -4$.
12. $y'' = \frac{3}{1+x^2}$; $y(0) = 0$; $y'(0) = -3$.
13. $y'' = -2\sin^2 x$; $y(0) = 2$; $y'(0) = -1$.
14. $y'' = -1$; $y(0) = 4$; $y'(0) = -2$.

15. $y'' = \dfrac{x^2}{1+x^2}$; $y(0)=2$; $y'(0)=-4$.

16. $y'' = e^{-x/2}$; $y(0)=2$; $y'(0)=-1$.

17. $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $y(0)=0$; $y'(0)=-1$.

18. $y'' = x^2-1$; $y(-1)=0$; $y'(-1)=1$.

19. $y'' = \dfrac{2x^2}{3}$; $y(0)=1$; $y'(0)=-1$.

20. $y'' = 2\sin 3x$; $y(0)=-1$; $y'(0)=4$.

21. $y'' = 2\cos 3x$; $y(0)=-1$; $y'(0)=0$.

22. $y'' = 3-x$; $y(0)=0$; $y'(0)=7$.

23. $y'' = 3^x$; $y(0)=0$; $y'(0)=-1$.

24. $y'' = 98x^3$; $y(1)=1$; $y'(1)=7$.

25. $y'' = 3x$; $y(1)=0$; $y'(1)=3$.

26. $y'' = e^{2x}$; $y(0)=1$; $y'(0)=-0{,}5$.

27. $y'' = \dfrac{1}{x}$; $y(1)=2$; $y'(1)=1$.

28. $y'' = \sin 2x$; $y(0)=1$; $y'(0)=0$.

29. $y'' = \dfrac{1}{x^2}$; $y(1)=2$; $y'(1)=1$.

30. $y'' = \dfrac{1+x^2}{x}$; $y(1)=0$; $y'(1)=0{,}5$.

31. $y'' = -\cos x - \sin x + 2; y(0)=1, y'(0)=-1$.

Задание 10. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1. $y''' x\ln x = y''$.
2. $xy''' + y'' = 1$.
3. $2xy''' = y''$.
4. $xy''' + y'' = x+1$.

17. $thx \cdot y^{IV} = y'''$.
18. $xy''' + y'' = \sqrt{x}$.
19. $y''' tgx = y'' + 1$.

5. $tgx \cdot y'' - y' + \dfrac{1}{\sin x} = 0.$

6. $x^2 y'' + xy' = 1.$

7. $y''' ctg 2x + 2y'' = 0.$

8. $x^3 y''' + x^2 y'' = 1.$

9. $tgx \cdot y''' = 2y''.$

10. $y''' ctg 2x = 2y''.$

11. $x^4 y'' + x^3 y' = 1.$

12. $xy''' + 2y'' = 0.$

13. $(1 + x^2) y'' + 2xy' = x^3.$

14. $x^5 y''' + x^4 y'' = 1.$

15. $xy''' - y'' + \dfrac{1}{x} = 0.$

16. $xy''' + y'' + x = 0.$

20. $y''' tg 5x = 5y''.$

21. $y''' th 7x = 7y''.$

22. $x^3 y''' + x^2 y'' = \sqrt{x}.$

23. $cthx \cdot y'' - y' + \dfrac{1}{chx} = 0.$

24. $(x+1) y''' + y'' = (x+1).$

25. $(1 + \sin x) y''' = \cos x \cdot y''.$

26. $xy''' + y'' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}.$

27. $-xy''' + 2y'' = \dfrac{2}{x^2}.$

28. $cthx \cdot y'' + y' = chx.$

29. $x^4 y'' + x^3 y' = 4.$

30. $y'' + \dfrac{2x}{x^2 + 1} y' = 2x.$

31. $(1 + x^2) y'' + 2xy' = 12x.^3$

Задание 11. Найти решение задачи Коши.

1. $4y^3 y'' = y^4 - 1,\ y(0) = \sqrt{2},\ y'(0) = 1/(2\sqrt{2}).$

2. $y'' = 128 y^3,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 8.$

3. $y'' y^3 + 64 = 0,\ y(0) = 4,\ y'(0) = 2.$

4. $y'' + 2\sin y \cos^3 y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

5. $y'' = 32 \sin^3 y \cos y,\ y(1) = \pi/2,\ y'(1) = 4.$

6. $y'' = 98 y^3,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 7.$

7. $y'' y^3 + 49 = 0,\ y(3) = -7,\ y'(3) = -1.$

8. $4y^3 y'' = 16 y^4 - 1,\ y(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ y'(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

9. $y'' + 8 \sin y \cos^3 y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$

10. $y'' = 72 y^3,\ y(2) = 1,\ y'(2) = 6.$

11. $y''y^3 + 36 = 0,\ y(0) = 3,\ y'(0) = 2.$

12. $y'' = 18\sin^3 y\cos y,\ y(1) = \pi/2,\ y'(1) = 3.$

13. $4y^3 y'' = y^4 - 16,\ y(0) = 2\sqrt{2},\ y'(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

14. $y'' = 50y^3,\ y(3) = 1,\ y'(3) = 5.$

15. $y''y^3 + 25 = 0,\ y(2) = -5,\ y'(2) = -1.$

16. $y'' + 18\sin y\cos^3 y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 3.$

17. $y'' = 8\sin^3 y\cos y,\ y(1) = \pi/2,\ y'(1) = 2.$

18. $y'' = 32y^3,\ y(4) = 1,\ y'(4) = 4.$

19. $y''y^3 + 16 = 0,\ y(1) = 2,\ y'(1) = 2.$

20. $y'' + 32\sin y\cos^3 y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 4.$

21. $y'' + 50\sin^3 y\cos y = 0,\ y(1) = \pi/2,\ y'(1) = 5.$

22. $y'' = 18y^3,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 3.$

23. $y''y^3 + 9 = 0,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 3.$

24. $y^3 y'' = 4(y^4 - 1),\ y(0) = \sqrt{2},\ y'(0) = \sqrt{2}.$

25. $y'' + 50\sin y\cos^3 y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 5.$

26. $y'' = 8y^3,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$

27. $y''y^3 + 4 = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = -2.$

28. $y'' = 2\sin^3 y\cos y,\ y(1) = \pi/2,\ y'(1) = 1.$

29. $y^3 y'' = y^4 - 16,\ y(0) = 2\sqrt{2},\ y'(0) = \sqrt{2}.$

30. $y'' = 2y^3,\ y(-1) = 1,\ y'(-1) = 1.$

31. $y''y^3 + 1 = 0,\ y(1) = -1,\ y'(1) = -1.$

Задание 12. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1. $y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2.$

2. $y''' - y'' = 6x^2 + 3x.$

17. $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = x - 3.$

18. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 12x^2 - 6x.$

3. $y''' - y' = x^2 + x.$

4. $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = 2x.$

5. $y^{IV} - y''' = 5(x+2)^2.$

6. $y^{IV} - 2y''' + y'' = 2x(1-x).$

7. $y^{IV} + 2y''' + y'' = x^2 + x - 1.$

8. $y^{V} - y^{IV} = 2x + 3.$

9. $3y^{IV} + y''' = 6x - 1.$

10. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 4x^2.$

11. $y''' + y'' = 5x^2 - 1.$

12. $y^{IV} + 4y''' + 4y'' = x - x^2.$

13. $7y''' - y'' = 12x.$

14. $y''' + 3y'' + 2y' = 3x^2 + 2x.$

15. $y''' - y' = 3x^2 - 2x + 1.$

16. $y''' - y'' = 4x^2 - 3x + 2.$

19. $y''' - 4y'' = 32 - 384x^2.$

20. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 2 - 3x^2.$

21. $y''' + y'' = 49 - 24x^2.$

22. $y''' - 2y'' = 3x^2 + x - 4.$

23. $y''' - 13y'' + 12y' = x - 1.$

24. $y^{IV} + y''' = x.$

25. $y''' - y'' = 6x + 5.$

26. $y''' + 3y'' + 2y' = x^2 + 2x + 3.$

27. $y''' - 5y'' + 6y' = (x-1)^2.$

28. $y^{IV} - 6y''' + 9y'' = 3x - 1.$

29. $y''' - 13y'' + 12y' = 18x^2 - 39.$

30. $y^{IV} + y''' = 12x + 6.$

31. $y''' - 5y'' + 6y' = 6x^2 + 2x - 5.$

Задание 13. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = (16 - 12x)e^{-x}.$

2. $y''' - 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^{x}.$

3. $y''' - y'' - y' + y = (3x + 7)e^{2x}.$

4. $y''' - 2y'' + y' = (2x + 5)e^{2x}.$

5. $y''' - 3y'' + 4y = (18x - 21)e^{-x}.$

6. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = (2x - 5)e^{x}.$

7. $y''' - 4y'' + 4y' = (x - 1)e^{x}.$

8. $y''' + 2y'' + y' = (18x + 21)e^{2x}.$

9. $y''' + y'' - y' - y = (8x + 4)e^{x}.$

10. $y''' - 3y'' - 2y = -4xe^{x}.$

11. $y''' - 3y'' + 2y = (4x+9)e^{2x}$.

12. $y''' + 4y'' + 5y' + 2y = (12x+16)e^{x}$.

13. $y''' - y'' - 2y' = (6x-11)e^{-x}$.

14. $y''' + y'' - 2y' = (6x+5)e^{x}$.

15. $y''' + 4y'' + 4y' = (9x+15)e^{x}$.

16. $y''' - 3y'' - y' + 3y = (4-8x)e^{x}$.

17. $y''' - 4y'' - 4y' + 4y = (7-6x)e^{x}$.

18. $y''' + 3y'' + 2y' = (1-2x)e^{-x}$.

19. $y''' - 5y'' + 7y' - 3y = (20-16x)e^{-x}$.

20. $y''' - 4y'' + 3y' = -4xe^{x}$.

21. $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = e^{-x}(32x-32)$.

22. $y''' - 6y'' + 9y' = 4xe^{x}$.

23. $y''' - 7y'' + 15y' - 9y = (8x-12)e^{x}$.

24. $y''' - y'' - 5y' - 3y = -(8x+4)e^{x}$.

25. $y''' + 5y'' + 7y' + 3y = (16x+20)e^{x}$.

26. $y''' - 2y'' - 3y' = (8x-14)e^{-x}$.

27. $y''' + 2y'' - 3y' = (8x+6)e^{x}$.

28. $y''' + 6y'' + 9y' = (16x+24)e^{x}$.

29. $y''' - y'' - 9y' + 9y = (12-16x)e^{x}$.

30. $y''' + 4y'' + 3y' = 4(1-x)e^{-x}$.

31. $y''' + y'' - 6y' = (20x+14)e^{2x}$.

Задание 14. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1. $y'' + 2y' = 4e^{x}(\sin x + \cos x)$.

2. $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}\sin 6x$.

3. $y'' + 2y' = -2e^{x}(\sin x + \cos x)$.

4. $y'' + y = 2\cos 7x + 3\sin 7x.$

5. $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x.$

6. $y'' - 4y' + 8y = e^{x}(5\sin x - 3\cos x).$

7. $y'' + 2y' = e^{x}(\sin x + \cos x).$

8. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 3x.$

9. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 4x.$

10. $y'' + y = 2\cos 3x - 3\sin 3x.$

11. $y'' + 2y' + 5y = -2\sin x.$

12. $y'' - 4y' + 8y = e^{x}(-3\sin x + 4\cos x).$

13. $y'' + 2y' = 10e^{x}(\sin x + \cos x).$

14. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 5x.$

15. $y'' + y = 2\cos 5x + 3\sin 5x.$

16. $y'' + 2y' + 5y = -17\sin 2x.$

17. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos x.$

18. $y'' - 4y' + 8y = e^{x}(3\sin x + 5\cos x).$

19. $y'' + 2y' = 6e^{x}(\sin x + \cos x).$

20. $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}\sin 4x.$

21. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 5x.$

22. $y'' + y = 2\cos 7x - 3\sin 7x.$

23. $y'' + 2y' + 5y = -\cos x.$

24. $y'' - 4y' + 8y = e^{x}(2\sin x - \cos x).$

25. $y'' + 2y' = 3e^{x}(\sin x + \cos x).$

26. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 4x.$

27. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 8x.$

28. $y'' + 2y' + 5y = 10\cos x.$

29. $y'' + y = 2\cos 4x + 3\sin 4x.$

30. $y'' - 4y' + 8y = e^{x}(-\sin x + 2\cos x).$

31. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 6x.$

Задание 15. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1. $y'' - 2y' = 2ch2x.$
2. $y'' + y = 2\sin x - 6\cos x + 2e^{x}.$
3. $y''' - y' = 2e^{x} + \cos x.$
4. $y'' - 3y' = 2ch3x.$
5. $y'' + 4y = -8\sin 2x + 32\cos 2x + 4e^{2x}.$
6. $y''' - y' = 10\sin x + 6\cos x + 4e^{x}.$
7. $y'' - 4y' = 16ch4x.$
8. $y'' + 9y = -18\sin 3x - 18e^{3x}.$
9. $y''' - 4y' = 24e^{2x} - 4\cos 2x + 8\sin 2x.$
10. $y'' - 5y' = 50ch5x.$
11. $y'' + 16y = 16\sin 4x - 16e^{4x}.$
12. $y''' - 9y' = -9e^{3x} + 18\sin 3x - 9\cos 3x.$
13. $y'' - y' = 2chx.$
14. $y'' + 25y = 20\cos 5x - 10\sin 5x + 50e^{5x}.$
15. $y''' - 16y' = 48e^{4x} + 64\cos 4x - 64\sin 4x.$
16. $y'' + 2y' = 2ch2x.$
17. $y'' + 36y = 24\sin 6x - 12\cos 6x + 36e^{6x}.$
18. $y''' - 25y' = 25(\sin 5x + \cos 5x) - 50e^{5x}.$
19. $y'' + 3y' = 2ch3x.$
20. $y'' + 49y = 14\sin 7x + 7\cos 7x - 98e^{7x}.$
21. $y''' - 36y' = 36e^{6x} - 72(\cos 6x + \sin 6x).$
22. $y'' + 4y' = 16sh4x.$
23. $y'' + 64y = 16\sin 8x - 16\cos 8x - 64e^{8x}.$

24. $y''' - 49y' = 14e^{7x} - 49(\cos 7x + \sin 7x)$.

25. $y'' + 5y' = 50sh5x$.

26. $y'' + 81y = 9\sin 9x + 3\cos 9x + 162e^{9x}$.

27. $y''' - 64y' = 128\cos 8x - 64e^{8x}$.

28. $y'' + y' = 2shx$.

29. $y'' + 100y = 20\sin 10x - 30\cos 10x - 200e^{10x}$.

30. $y''' - 81y' = 162 \cdot e^{9x} + 81\sin 9x$.

31. $y''' - 100y' = 20e^{10x} + 100\cos 10x$.

Задание 16. Найти решение задачи Коши.

1. $y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\cos \pi x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.

2. $y'' + 3y' = \dfrac{9e^{3x}}{1 + e^{3x}}$, $y(0) = \ln 4$, $y'(0) = 3(1 - \ln 2)$.

3. $y'' + 4y = 8ctg2x$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 5$, $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 4$.

4. $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4}{1 + e^{-2x}}$, $y(0) = 1 + 2\ln 2$, $y'(0) = 6\ln 2$.

5. $y'' - 9y' + 18y = \dfrac{9e^{3x}}{1 + e^{-3x}}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

6. $y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\sin \pi x}$, $y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$, $y'(\dfrac{1}{2}) = \dfrac{\pi^2}{2}$.

7. $y'' + \dfrac{1}{\pi^2} y = \dfrac{1}{\pi^2 \cos(x/\pi)}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

8. $y'' - 3y' = \dfrac{9e^{-3x}}{3 + e^{-3x}}$, $y(0) = 4\ln 4$, $y'(0) = 3(3\ln 4 - 1)$.

9. $y'' + y = 4ctgx$, $y(\pi/2) = 4$, $y'(\pi/2) = 4$.

10. $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4}{2 + e^{-2x}}$, $y(0) = 1 + 3\ln 3$, $y'(0) = 10\ln 3$.

11. $y'' + 6y' + 8y = \dfrac{4e^{-2x}}{2 + e^{2x}}, y(0) = 0, y'(0) = 0.$

12. $y'' + 9y = \dfrac{9}{\sin 3x}, y(\pi/6) = 4, y'(\pi/6) = 3\pi/2.$

13. $y'' + 9y = \dfrac{9}{\cos 3x}, y(0) = 1, y'(0) = 0.$

14. $y'' - y' = \dfrac{e^{-x}}{2 + e^{-x}}, y(0) = \ln 27, y'(0) = \ln 9 - 1.$

15. $y'' + 4y = 4ctg\, 2x, y(\pi/4) = 3, y'(\pi/4) = 2.$

16. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{3 + e^{-x}}, y(0) = 1 + 8\ln 2, y'(0) = 14\ln 2.$

17. $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4e^{2x}}{1 + e^{-2x}}, y(0) = 0, y'(0) = 0.$

18. $y'' + 16y = \dfrac{16}{\sin 4x}, y(\pi/8) = 3, y'(\pi/8) = 2\pi.$

19. $y'' + 16y = \dfrac{16}{\cos 4x}, y(0) = 3, y'(0) = 0.$

20. $y'' - 2y' = \dfrac{4e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}, y(0) = \ln 4, y'(0) = \ln 4 - 2.$

21. $y'' + \dfrac{y}{4} = \dfrac{1}{4} ctg\left(\dfrac{x}{2}\right), y(\pi) = 2, y'(\pi) = \dfrac{1}{2}.$

22. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{2 + e^{-x}}, y(0) = 1 + 3\ln 3, y'(0) = 5\ln 3.$

23. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{e^{-x}}{2 + e^{x}}, y(0) = 0, y'(0) = 0.$

24. $y'' + 4y = \dfrac{4}{\sin 2x}, y(\pi/4) = 2, y'(\pi/4) = \pi.$

25. $y'' + 4y = \dfrac{4}{\cos 2x}, y(0) = 2, y'(0) = 0.$

26. $y'' + y' = \dfrac{e^{x}}{2 + e^{x}}, y(0) = \ln 27, y'(0) = 1 - \ln 9.$

27. $y'' + y = 2ctgx, y(\pi/2) = 1, y'(\pi/2) = 2.$

28. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{1+e^{-x}}, y(0) = 1 + 2\ln 2, y'(0) = 3\ln 2.$

29. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^x}{1+e^{-x}}, y(0) = 0, y'(0) = 0.$

30. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}, y(\pi/2) = 1, y'(\pi/2) = \pi/2.$

31. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}, y(0) = 1, y'(0) = 0.$

Задание 17. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений.

1. $\begin{cases} x' = 2x + y + 2e^t \\ y' = x + 2y - 3e^{4t} \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' = y - 5\cos t \\ y' = 2x + y \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = x - 5\sin t \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = -y + 2x + 1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = 2x - 4y \\ y' = x - 3y + 3e^t \end{cases}$

6. $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = y - 2x + 18t \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = 3x - 4y + e^{-2t} \\ y' = x - 2y - 3e^{-2t} \end{cases}$

8. $\begin{cases} x' = 2y - x - 2\cos t \\ y' = 4y - 3x + \sin t \end{cases}$

16. $\begin{cases} x' = 2x - 3y + 4\sin t + 2\cos t \\ y' = x - 2y + 2\sin t \end{cases}$

17. $\begin{cases} x' = 4x + y - e^{2t} \\ y' = y - 2x \end{cases}$

18. $\begin{cases} x' = x - y + 8t \\ y' = 5x - y \end{cases}$

19. $\begin{cases} x' = y + 2e^t \\ y' = -x + 2y \end{cases}$

20. $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = x + 2e^t \end{cases}$

21. $\begin{cases} x' = 2x - 3y \\ y' = x - 2y + 2\sin t \end{cases}$

22. $\begin{cases} x' = 5x - 3y + 2e^{3t} \\ y' = x + y + 5e^{-t} \end{cases}$

23. $\begin{cases} x' = 2y - x + 1 \\ y' = 3y - 2x \end{cases}$

9. $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 2y - x - 5e^t \sin t \end{cases}$

10. $\begin{cases} x' = 5y - x \\ y' = y - x + 8t \end{cases}$

11. $\begin{cases} x' = 2x + 3y + 5t \\ y' = 3x + 2y + 8e^t \end{cases}$

12. $\begin{cases} x' = 3x + 2y + 4e^{5t} \\ y' = x + 2y \end{cases}$

13. $\begin{cases} x' = 4x - 3y + \sin t \\ y' = 2x - y - 2\cos t \end{cases}$

14. $\begin{cases} x' = x + y + 1 + e^t \\ y' = 3x - y \end{cases}$

15. $\begin{cases} x' = -x + 3y \\ y' = x + y + 1 + e^t \end{cases}$

24. $\begin{cases} x' = -3x + y + 3e^t \\ y' = -4x + 2y \end{cases}$

25. $\begin{cases} x' = 2x + 4y - 8 \\ y' = 3x + 6y \end{cases}$

26. $\begin{cases} x' = -3x + 4y + 4e^t \\ y' = 3x - 4y + 6e^t \end{cases}$

27. $\begin{cases} x' = y + 2e^t \\ y' = x + t^2 \end{cases}$

28. $\begin{cases} x' = 6x + 3y \\ y' = 4x + 2y - 8 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x' = -2x + 2y \\ y' = 2x + y + 16te^t \end{cases}$

30. $\begin{cases} x' = x + 2y + 16te^t \\ y' = 2x - 2y \end{cases}$

31. $\begin{cases} x' = -3y + \cos t - e^t, \\ y' = 4y - \cos t + 2e^t. \end{cases}$

Задание 18. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений.

1. $\begin{cases} x' = 5x - 6y + 6z \\ y' = x + z \\ z' = -2x + 4y - 3z \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' = x - y + z \\ y' = -2x + y - z \\ z' = y - x \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = 4x - y + 4z \\ y' = x + y + z \\ z' = x - y + 3z \end{cases}$

16. $\begin{cases} x' = 2x + y - z \\ y' = x + 2y - z \\ z' = -x + y + 2z \end{cases}$

17. $\begin{cases} x' = -y + 2z \\ y' = -x + y + z \\ z' = x - y + z \end{cases}$

18. $\begin{cases} x' = 5x + 6y - 6z \\ y' = -2x - 3y + 4z \\ z' = x + y \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = 2x - y + z \\ y' = x + 2y - z \\ z' = x - y + 2z \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = x + y - z \\ y' = -x + y + z \\ z' = -x + 2y \end{cases}$

6. $\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -x + y - 2z \\ z' = x - y + z \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = -x + 3y + z \\ z' = 4x - y + 4z \end{cases}$

8. $\begin{cases} x' = 2x - y + z \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x - y + 2z \end{cases}$

9. $\begin{cases} x' = 2y - z \\ y' = x + y - z \\ z' = x + y + z \end{cases}$

10. $\begin{cases} x' = x - 2y - z \\ y' = -x + y + z \\ z' = x - z \end{cases}$

11. $\begin{cases} x' = 4x + 4y - z \\ y' = x + 3y - z \\ z' = x + y + z \end{cases}$

12. $\begin{cases} x' = 2x + y - z \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = -x + y + 2z \end{cases}$

19. $\begin{cases} x' = x - y - 2z \\ y' = x - y \\ z' = -x + y + z \end{cases}$

20. $\begin{cases} x' = 3x + y - z \\ y' = 4x + 4y - z \\ z' = x + y + z \end{cases}$

21. $\begin{cases} x' = 3x + 12y - 4z \\ y' = -x - 3y + z \\ z' = -x - 12y + 6z \end{cases}$

22. $\begin{cases} x' = -3x + 4y - 2z \\ y' = x + y \\ z' = 6x - 6y + 5 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x' = -x + z \\ y' = x + y - z \\ z' = -x - 2y + z \end{cases}$

24. $\begin{cases} x' = 3x - y + z \\ y' = x + y + z \\ z' = 4x - y + 4z \end{cases}$

25. $\begin{cases} x' = 2x + y - z \\ y' = x + 2y - z \\ z' = x + 2y - z \end{cases}$

26. $\begin{cases} x' = x - y + z \\ y' = x + y - z \\ z' = 2x - y \end{cases}$

27. $\begin{cases} x' = y + z \\ y' = 4x - 3y - 2z \\ z' = -6x + 6y + 5z \end{cases}$

13. $\begin{cases} x' = x + y - z \\ y' = 2x - z \\ z' = x - y + z \end{cases}$

14. $\begin{cases} x' = -3x - 2y + 4z \\ y' = 6x + 5y - 6z \\ z' = x + y \end{cases}$

15. $\begin{cases} x' = 2x - y + z \\ y' = 12x - 4y - 12z \\ z' = -4x + y + 5 \end{cases}$

28. $\begin{cases} x' = -3x - y + z \\ y' = 12x + 3y - 4z \\ z' = -12x - y + 6z \end{cases}$

29. $\begin{cases} x' = -z \\ y' = 4x + y + 4z \\ z' = y \end{cases}$

30. $\begin{cases} x' = y + z \\ y' = -6x + 5y + 6z \\ z' = 4x - 2y - 3z \end{cases}$

31. $\begin{cases} x' = -2x - 2y - 4z, \\ y' = -2x + y - 2z, \\ z' = 5x + 2y + 7z. \end{cases}$

Задание 19. На отрезке $x \in [0;1]$ с шагом 0,1 методом Эйлера построить решение задачи Коши.

1. $y' = x + y$; $y(0) = 0$.
2. $y' = -x + y$; $y(0) = 0$.
3. $y' = x - y$; $y(0) = 0$.
4. $y' = -x - y$; $y(0) = 0$.
5. $y' = 2x + y$; $y(0) = 0$.
6. $y' = 2x - y$; $y(0) = 0$.
7. $y' = -2x + y$; $y(0) = 0$.
8. $y' = -2x - y$; $y(0) = 0$.
9. $y' = 3x + y$; $y(0) = 0$.
10. $y' = 3x - y$; $y(0) = 0$.
11. $y' = -3x + y$; $y(0) = 0$.
12. $y' = -3x - y$; $y(0) = 0$.
13. $y' = x + 2y$; $y(0) = 0$.
14. $y' = -x + 2y$; $y(0) = 0$.
16. $y' = -x - 2y$; $y(0) = 0$.
17. $y' = x + 3y$; $y(0) = 0$.
18. $y' = -x + 3y$; $y(0) = 0$.
19. $y' = x - 3y$; $y(0) = 0$.
20. $y' = -x - 3y$; $y(0) = 0$.
21. $y' = 4x + y$; $y(0) = 0$.
22. $y' = -4x + y$; $y(0) = 0$.
23. $y' = 4x - y$; $y(0) = 0$.
24. $y' = -4x - y$; $y(0) = 0$.
25. $y' = 2x + 3y$; $y(0) = 0$.
26. $y' = -2x + 3y$; $y(0) = 0$.
27. $y' = 2x - 3y$; $y(0) = 0$.
28. $y' = -2x - 3y$; $y(0) = 0$.
29. $y' = 3x + 2y$; $y(0) = 0$.

15. $y' = x - 2y$; $y(0) = 0$.

30. $y' = -3x + 2y$; $y(0) = 0$.

31. $y' = 5x - 3y$; $y(0) = 0$.

Задание 20. Решить задачи прикладного характера.

1. Заполненный водой радиатор автомобильного двигателя «закипел» (T=100°). Сколько времени необходимо ждать водителю, чтобы температура радиатора (и двигателя) стала только на 5°С выше температуры воздуха 20°С, если до 80°С охлаждение прошло за 20 минут?

2. Заполненный антифризом радиатор автомобильного двигателя «закипел» (T=125°С). Сколько времени придется ждать водителю, чтобы температура радиатора (и двигателя) на 2°С была выше температуры воздуха (25°С), если он обнаружил, что на охлаждение до 85°С потребовалось 45 минут?

3. Заполненный водой радиатор автомобильного двигателя «закипел» (T=100°). Сколько времени необходимо ждать водителю, чтобы температура двигателя превышала температуру окружающей среды всего на 2°С, если экспериментально установлено, что коэффициент пропорциональности в законе охлаждения Ньютона равен $k = -0{,}07$ град/мин и температура окружающей среды равна 18°С?

4. Заполненный антифризом радиатор автомобильного двигателя «закипел» (T=125°С). За сколько времени двигатель охладится до температуры 30°, если найденный экспериментально коэффициент пропорциональности в законе охлаждения Ньютона равен $k = -0{,}1$ град/мин, а температура воздуха в этот день составляла 25°С?

5. Металлическая болванка, нагретая до 420°С, охлаждается в воздухе, температура которого 20°С. Через 15 минут после начала охлаждения температура детали понизилась до 120°. Определить температуру болванки через 30 минут охлаждения.

6. Известно, что тело охлаждается в течение 15 мин от 100° до 80°. Через сколько минут температура тела понизится до 40°, если температура окружающей среды составляет 10°?

7. Тело движется со скоростью, пропорциональной пройденному пути. Какой путь пройдет тело за 5 секунд от начала движения, если известно, что за 1 секунду оно проходит путь 8 м, а за 3 секунды – 40 м?

8. Автомобиль движется прямолинейно со скоростью 30 м/с. За какое время и на каком расстоянии он будет остановлен тормозами, если сопротивление движению после начала торможения равно 0,3 его веса (g=10 м/с^2)?

9. Материальная точка массы m замедляет свое движение под действием силы сопротивления среды, пропорциональной квадрату скорости. Найти зависимость скорости от времени. Найти скорость точки через 3 с после начала замедления, если $v(0)=100$ м/с, а $v(1)=50$ м/с.

10. Тело движется прямолинейно с ускорением, пропорциональным произведению скорости v на t. Установить зависимость между скоростью и временем, если при $t=0, v=v_0$.

11. Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью 20 км/час. Через одну минуту после выключения двигателя ее скорость уменьшилась до 2 км/час. Определить скорость лодки через 2 минуты после остановки двигателя, считая, что сопротивление воды пропорционально скорости движения лодки.

12. Тело движется по прямой со скоростью, обратно пропорциональной пройденному пути. В начальный момент тело имело скорость $v_0=15$ м/с и находилось на расстоянии 4 м от начала отсчета пути. Определить скорость тела через 8 с после начала движения.

13. Найти кривую, у которой наклон в любой точке на две единицы меньше абсциссы точки касания, зная, что кривая проходит через точку $A(2;0)$.

14. Найти кривую, проходящую через точку $A(1;2)$, у которой отрезок касательной от тоски касания до точки пересечения с осью Ox делится осью ординат пополам.

15. Найти линию, проходящую через точку $M_0(15;1)$ и обладаю-

щую тем свойством, что в любой ее точке M нормальный вектор $\overline{MN}$ с концом на оси Oy имеет длину, равную 25, и образует острый угол с положительным направлением оси Oy.

16. Найти кривые, у которых точка пересечения любой касательной с осью Ox имеет абсциссу, вдвое меньшую абсциссы точки касания.

17. Найти кривую, проходящую через точку $A(2;1)$, у которой подкасательная равна среднему арифметическому координат точки касания.

18. Найти кривую, проходящую через точку $O(0,0)$, зная что угловой коэффициент в любой ее точке равен сумме координат этой точки.

19. После проведения собрания воздух в зале вместимостью 10800 м^3 содержит 0,12% CO_2. Сколько м^3 воздуха, содержащего 0,04% CO_2 надо ежеминутно доставлять в зал, чтобы по истечении 10 минут содержание углекислоты в нем было 0,06%.

20. В воздухе аудитории объемом 200 м^3 содержится 0,15% CO_2. Вентилятор подает в минуту 20 м^3 воздуха, содержащего 0,04% CO_2. Через какое время количество углекислого газа уменьшится в двое?

21. В помещении, имеющем общий объем 10000 м^3, содержится 0,16% CO_2. Сколько м^3 чистого воздуха, содержащего 0,04% CO_2, необходимо ежеминутно доставлять в помещение вентиляторами, чтобы по истечении 20 минут содержание углекислоты в помещении уменьшилось до 0,08%.

22. В помещении цеха вместимостью 200000 м^3 воздух содержит 0,12% углекислоты. Вентиляторы доставляют свежий воздух, содержащий 0,04% углекислоты, в количестве 1500 м^3/мин. Рассчитать содержание углекислоты в воздухе через 10 минут.

23. После проведения киносеанса воздух в зале вместимостью 12500 м^3 содержит 0,20% CO_2. Сколько м^3 воздуха, содержащего 0,04% CO_2 надо ежеминутно доставлять в зал, чтобы по истечении 30 минут содержание углекислоты в нем было 0,05%.

24. Скорость распада радия пропорциональна наличной его мас-

се. Определить, через сколько лет от 1 кг радия останется 0,7 кг, если известно, что период полураспада радия (время, за которое масса радия уменьшится вдвое) равен 1590 лет.

25. За 30 дней распалось 50% первоначального количества радия. Через сколько времени останется 1% от первоначального количества, если скорость распада радия пропорциональна его количеству в рассматриваемый момент?

26. Скорость распада радиоактивного вещества пропорциональна его количеству в данный момент времени. Определить количество цинка к концу 200 суток, если период полураспада $T = 300$ суток, в начале исследования имелось $N_0 = 8$ г цинка.

27. Найти зависимость силы тока $i = i(t)$ от времени, если ее сопротивление *R,* коэффициент самоиндукции *L*, а электродвижущая сила изменяется по закону $E = kt, i(0) = 0$, (*L, R, k* – постоянные), *k* – коэффициент пропорциональности.

28. Найти зависимость тока i(А) от времени t(с) при подключении цепи, содержащей постоянные индуктивность L(Гн) и резистор R(Ом), к постоянному источнику напряжения E(В).

29. Разность потенциалов на зажимах катушки равномерно падает от $E_0 = 2$В до $E_1 = 1$В в течение времени t *с*. Каков будет ток во время $t_1 = 8$с, если в начале опыта от был равен $i_0 = 10$А. Сопротивление катушки $R = 0{,}1$Ом, коэффициент индуктивности $L = 0{,}1$Гн.

30. К источнику э.д.с. *E* подключается контур, состоящий из последовательно соединенных катушки индуктивности *L*, омического сопротивления *R* и емкости *C*. Найти ток *i* в цепи как функцию времени *t*, если в начальный момент ток в контуре и заряд конденсатора равны нулю.

31. Найти силу тока в катушке в момент *t*, если ее сопротивление *R,* коэффициент самоиндукции *L*, а электродвижущая сила меняется по закону $E = E_0 \sin \omega t$. Начальная сила тока $i_0 = 0$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Данко П.Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб.пособ. для втузов. в 2-х ч. / *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Ч. II 7-е изд.,испр.-М.:Оникс., 2009.
2. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления: Учеб.для вузов. В 2-х т./ *Н.С. Пискунов*.-Изд.стереотип.-М.: Интеграл-Пресс, 2002. Т.1.
3. *Черненко В.Д.* Высшая математика в примерах и задачах: Учебное пособие для вузов. В 3-х т.: Т.2.- СПб.: Политехника, 2003.-476с.:ил.
4. *Лунгу К.Н.* Сборник задач по высшей математике. 2 курс/ *Лунгу К.Н., Норин В.П., Письменный Д.Т., Шевченко Ю.А.*; под ред.С.Н.Федина.-3-е изд.,испр.-М.:Айрис-пресс, 2005.-592с.:ил.- (Высшее образование).
5. *Кузнецов Л.А.* Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты: учеб.пособ./ *Л.А. Кузнецов*.-4-е изд., стер.-СПб.: Лань, 2005.
6. *Бермант А.Ф., Араманович И.Г.* Краткий курс математического анализа: Учебник для вузов. 12-е изд., стер. – СПб.: издательство «Лань», 2005. – 736с.:ил.- (Учебник для вузов. Специальная литература).

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное пособие

ЕГОРОВА Ирина Петровна,
БОГДАНОВА Светлана Михайловна

Высшая математика.
Дифференциальные уравнения

Редакторы:

Е.С. Захарова
И. А. Назарова

Подписано в печать 27.11.2013г.
Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная
Усл. п. л. 5,4 Уч.-изд. л. 3,92
Тираж 50 экз. Рег. № 10/13sf

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Самарский государственный технический университет»
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Главный корпус

Отпечатано в типографии
Самарского государственного технического университета
Филиал в г. Сызрани, 446001, г. Сызрань, ул. Советская 45